
Turbulência

Atila P. Silva Freire
*Programa de Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ*

Anderson Ilha
*Diretoria de Metrologia Científica e Industrial
Inmetro*

Marcelo J. Colaço
*Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
Instituto Militar de Engenharia*

Editores

ABCM – Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica
COPPE/UFRJ – Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
IME – Instituto Militar de Engenharia

Coleção Cadernos de Turbulência
Turbulência, Volume 5, Tomo 1.

5^a Escola de Primavera em Transição e Turbulência
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
25 a 29 de setembro de 2006

Editores

Atila P. Silva Freire, *Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ*
Anderson Ilha, *Diretoria de Metrologia Científica e Industrial, Inmetro*
Marcelo J. Colaço, *Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, IME*

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Processos Técnicos da
Biblioteca do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Escola de Primavera em Transição e Turbulência (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ)
Turbulência: Anais da V Escola de Primavera em Transição e Turbulência,
Rio de Janeiro, 25 a 29 de setembro de 2006 / editores Atila P. Silva Freire,
Anderson Ilha e Marcelo J. Colaço. Rio de Janeiro: ABCM, 2006.
XVI, 466 p.; 23,5 cm – (Coleção Cadernos de Turbulência. Turbulência, V. 5, Tomo 1)
Inclui bibliografias

1. Turbulência. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Fenômenos de transporte.
I. Freire, Atila P. Silva II. II. V EPTT (5.:2006: Rio de Janeiro, RJ).
III. Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica. IV. Título. II.

Série

629.1332

E74t

ISBN (10 dígitos): 85-85769-24-6

ISBN (13 dígitos): 978-85-85769-24-6

Copyright 2006, Associação Brasileira de Ciências e Engenharia Mecânica, ABCM.

A ABCM não autoriza a reprodução de qualquer parte desta publicação para sua distribuição em geral, para promoções, para a criação de novas publicações ou para a venda. Apenas através de prévia solicitação, por escrito, e em casos.

Documento preparado pelos Editores em \LaTeX .

Impresso no Brasil pela Gráfica Graffito.

ISBN 85-85769-24-6



9 788585 769246

Conteúdo

1	Mecânica do Contínuo e Turbulência	1
1.1	Introdução	1
1.2	Descrição do movimento	2
1.3	Conjuntos materiais	4
1.4	Gradiente de deformação, estiramento, cisalhamento e rotação	5
1.5	Gradiente de velocidades, taxa de deformação e giro	7
1.6	Equações de transporte para os tensores gradiente de velocidade, taxa de deformação e vorticidade	10
1.7	Convecção e difusão da vorticidade	10
1.8	Mudança de observador	11
1.9	Identificação de vórtices	12
1.10	Referências	14
2	Estimativas rigorosas para escoamentos turbulentos baseadas nas equações de Navier-Stokes	17
2.1	Introdução	17
2.2	As equações de Navier-Stokes	18
2.3	Quantidades médias, médias amostrais e soluções estatísticas	19
2.4	Teoria de Kolmogorov e alguns resultados rigorosos	21
2.4.1	A lei de dissipação de energia de Kolmogorov	21
2.4.2	Cascata de energia	22
2.5	Escoamento em um canal liso sob um gradiente de pressão (e em outras geometrias)	24
2.5.1	Estimativa por baixo para C_f	26
2.5.2	Estimativa por cima para C_f	27
2.6	Referências	31
3	Introdução à teoria estatística da turbulência	37
3.1	Introdução	37
3.2	Descrição estatística da turbulência	40
3.2.1	Aspectos cinéticos	40
3.2.2	Aspectos dinâmicos	55
3.3	Fenomenologia de Kolmogorov	63

3.3.1	Leis de escala na faixa inercial	63
3.3.2	Complexidade computacional das DNS	66
3.3.3	Decaimento temporal da energia	68
3.3.4	Dispersão de Richardson	69
3.4	O fenômeno da intermitência	73
3.4.1	Anomalias de escala	73
3.4.2	Densidades de probabilidade	74
3.4.3	Modelos fenomenológicos	76
3.4.4	Formalismo multifractal	83
3.4.5	Auto-similaridade estendida	90
3.5	Projeto de conclusão	91
3.6	Referências	92
4	Princípios de anemometria térmica	99
4.1	Introdução	99
4.2	Princípios básicos	101
4.2.1	Modos de operação	102
4.2.2	A ponte de Wheatstone	103
4.2.3	Tipos de sensores	106
4.2.4	A transferência de calor entre o fio-quente e o fluido	107
4.2.5	Leis de calibração	109
4.3	Anemômetro de corrente constante	110
4.3.1	Princípio de funcionamento	110
4.3.2	Filtragem do sinal	112
4.4	Anemômetro de temperatura constante	112
4.4.1	O circuito de controle	113
4.4.2	A taxa de sobreaquecimento	117
4.4.3	Controle digital	119
4.5	Resposta dinâmica da ponte CTA	121
4.5.1	Modelos da dinâmica do anemômetro	125
4.5.2	Teste de resposta em frequência e teste de resposta transitória	127
4.6	Medição de velocidade	130
4.6.1	Sensibilidade direcional	132
4.6.2	Medição de duas componentes de velocidade	134
4.6.3	Medição do vetor velocidade	136
4.7	Medição simultânea de velocidade e temperatura	138
4.7.1	Calibração de temperatura para o fio-frio	139
4.7.2	Calibração direta de velocidade e de temperatura para o sensor de fio-quente	140
4.7.3	Métodos de compensação analítica	142
4.7.4	Aparato experimental	143
4.7.5	Comparação entre os métodos	146
4.8	Aquisição e tratamento de dados	148
4.8.1	Condicionamento e aquisição do sinal	149
4.8.2	Cálculo das estatísticas do escoamento	151

4.9	Análise de incertezas	155
4.9.1	Tipos de erros associados à medição	155
4.9.2	Incerteza da medição	156
4.9.3	Incerteza dos resultados	157
4.10	Aplicações	157
4.10.1	Escoamento ao redor de um cilindro	158
4.10.2	Escoamento sobre placa plana	159
4.10.3	Escoamento sobre superfície rugosa	162
4.11	Agradecimentos	167
4.12	Referências	167
5	Fundamentos de anemometria laser-Doppler	173
5.1	Preâmbulo	173
5.2	Introdução	175
5.3	Princípios básicos	179
5.3.1	Fonte de luz coerente	180
5.3.2	O efeito Doppler	181
5.3.3	O modelo de franjas	185
5.3.4	Resolução do sentido da velocidade	187
5.3.5	Ajuste do desvio de frequência	189
5.4	Teoria de reflexão da luz por partículas pequenas	191
5.4.1	A teoria de Lorenz-Mie	193
5.4.2	Características reflexivas do feixe de laser	195
5.4.3	Partículas em anemometria laser-Doppler	195
5.4.4	Detecção posterior ou anterior ao volume de controle	198
5.5	Geração do sinal	201
5.5.1	Detecção da luz refletida	201
5.5.2	Características do sinal da anemometria laser-Doppler	203
5.6	Aquisição e tratamento do sinal	205
5.6.1	Processadores de sinal	205
5.6.2	Cálculo das estatísticas do escoamento	211
5.6.3	Estimativa do espectro e funções de correlação	213
5.7	Sistemas de anemometria laser-Doppler	221
5.7.1	Sistemas unidirecionais	221
5.7.2	Sistemas bidimensionais	223
5.7.3	Sistemas tri-dimensionais	225
5.7.4	Outros componentes ópticos e acessórios	226
5.8	Análise de incertezas	228
5.8.1	Cálculo dos erros associado a uma medida	229
5.8.2	Incerteza dos resultados	232
5.8.3	Cálculo do erro associado às medidas de velocidade	233
5.9	Aplicações	235
5.9.1	Jato livre	235
5.9.2	Escoamento sobre variação de topografia	238
5.10	Agradecimentos	246

5.11	Referências	246
6	Turbulência em fluidos não-newtonianos	253
6.1	Introdução	253
6.1.1	Escoamentos turbulentos de fluidos não-newtonianos	253
6.1.2	Breve revisão do estado da arte	254
6.1.3	Organização do curso/capítulo	258
6.2	Propriedades reológicas de fluidos não newtonianos	259
6.2.1	Fluidos inelásticos: a viscosidade de corte, viscosimétrica ou de cisalhamento	259
6.2.2	Comportamento dependente do tempo	261
6.2.3	Fluidos com tensão de cedência	263
6.2.4	Fluidos viscoelásticos	265
6.3	Modelos constitutivos reológicos	269
6.3.1	Introdução e equações fundamentais	269
6.3.2	Modelos inelásticos	271
6.3.3	Modelos para fluidos com tensão de cedência	275
6.3.4	Modelos viscoelásticos explícitos	276
6.3.5	Modelos viscoelásticos implícitos na tensão	277
6.3.6	Modelos multimodo	284
6.4	Escoamento turbulento em dutos	285
6.4.1	Introdução	285
6.4.2	Fluidos viscosos	286
6.4.3	Fluidos viscoelásticos	289
6.4.4	Efeitos de escala	293
6.5	Filosofias de modelagem da turbulência	295
6.6	Fechamento de turbulência para modelo reológico de tensão pseudo-elástica	297
6.6.1	Introdução	297
6.6.2	Equação constitutiva	298
6.6.3	Equações de transporte	300
6.6.4	Fechamento para a viscosidade molecular média	303
6.7	Modelo $\kappa - \varepsilon$ anisotrópico de baixo número de Reynolds	306
6.8	Vários aspectos da modelagem	308
6.8.1	Função de amortecimento viscoso	308
6.8.2	A função de amortecimento f_μ	308
6.8.3	Modelo para a tensão pseudo-elástica	312
6.8.4	Resultados e discussão	317
6.9	Modelos de turbulência com base no modelo FENE-P	324
6.9.1	Introdução	324
6.9.2	Equações de governo e necessidades de modelação	324
6.9.3	Desenvolvimentos futuros	330
6.9.4	Modelos para outras equações constitutivas de fluidos	330
6.10	Referências	331

7	Transferência de calor em escoamentos turbulentos parietais	341
7.1	Introdução	341
7.2	As equações instantâneas	342
7.2.1	Introdução	342
7.2.2	Fluxo turbulento de calor em escoamentos parietais dilatáveis	343
7.2.3	A adimensionalização das equações instantâneas	345
7.2.4	Escoamentos dilatáveis	347
7.3	Formulação estatística para escoamentos dilatáveis	348
7.3.1	Funções estatísticas	351
7.3.2	Um modelo estatístico para escoamentos dilatáveis	353
7.3.3	As equações médias	354
7.3.4	As equações médias adimensionais	355
7.4	O problema de fechamento	356
7.4.1	Formulação evolutiva para o problema de fechamento	356
7.4.2	Formulação constitutiva para o problema de fechamento	365
7.4.3	Modelos de turbulência de origem constitutiva	368
7.5	Leis de parede	372
7.5.1	Introdução	372
7.5.2	A camada limite turbulenta de temperatura	373
7.5.3	Dedução da lei de parede para a camada limite térmica	378
7.5.4	O número de Prandtl turbulento	383
7.5.5	Determinação analógica dos fluxos turbulentos parietais de calor	386
7.6	Resultados	388
7.6.1	Introdução	388
7.6.2	Resultados	392
7.6.3	Conclusão	398
7.7	Agradecimentos	398
7.8	Referências	399
8	Simulação numérica de escoamentos complexos	405
8.1	Introdução	405
8.2	O conceito de decomposição de campos	409
8.2.1	A equação de Reynolds	410
8.2.2	Equações de transporte para o tensor de Reynolds	414
8.2.3	A equação para o transporte de escalares	417
8.2.4	Equações de transporte para o fluxo turbulento de escalares	418
8.3	Modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta	419
8.3.1	O conceito de viscosidade turbulenta	419
8.3.2	O modelo $\kappa - \varepsilon$	422
8.3.3	O modelo $\kappa - \omega$	429
8.3.4	O modelo <i>shear stress transport (SST)</i>	431
8.4	Modelos para a equação de transporte do tensor de Reynolds	432
8.4.1	O modelo <i>LRR</i>	435
8.4.2	O modelo <i>SSG</i>	438

8.4.3	O modelo <i>BSL</i> $\kappa - \omega$	439
8.5	Aplicações	440
8.5.1	Escoamento sobre colinas abruptas	440
8.5.2	Jato impingente sobre placa plana	453
8.6	Referências	460

Prefácio

O ato quase solene de escrever o Prefácio de um livro necessariamente provoca em seu escritor momentos de profunda reflexão. Afinal, o objeto de tanta dedicação intelectual se mostra por completo, desnudo, em suas virtudes e defeitos.

Em sua forma definitiva, que não pode ser modificada, o livro deveria não apenas transmitir aos seus leitores a letra fria do rigor de suas construções teóricas, mas, principalmente, o espírito de toda a sofisticação intelectual que se pretende alcançar.

O presente texto pertence a uma já extensa e exitosa família. A série de escolas dedicadas exclusivamente à investigação da turbulência de fluidos deu origem a outros textos que marcaram época. A manutenção da alta estirpe, pois, poderia causar sérios embaraços a novas contribuições.

A Turbulência é uma matéria com sabidas dificuldades conceituais, que exige de seus militantes especializações múltiplas e sofisticadas. Esse texto, sem dúvida, preencherá lacunas importantes no arcabouço de métodos e técnicas que se pretendem disponíveis para um ataque consistente às dificuldades de natureza teóricas e práticas impostas pela Turbulência àqueles que a ambicionam assaltar. Temas do mais alto grau de complexidade e importância são dissecados em dois tomos que formam uma obra com doze capítulos. Um julgamento honesto dos Editores classifica a presente contribuição como da maior relevância tanto para iniciantes como para pesquisadores experientes no assunto.

A dedicação dos autores e seu compromisso com o resultado final dessa jornada foram da maior sensibilidade. Os Editores, sinceramente, esperam que os leitores reconheçam as muitas horas de trabalho abnegado que permitiram a existência desta obra.

Finalmente, talvez devêssemos agora nos inquirir sobre o propósito de tudo isso. Por que trabalhar com tamanho afincamento para a existência dessa obra? A resposta é simples e singela: para a construção de uma sociedade melhor. Um objetivo que nos tem sido caro e que nos possibilitou encontrar aliados importantes na ABCM, na FAPERJ e no CNPq. Este projeto é, sobretudo, uma iniciativa feliz da ABCM e do Pronex “Núcleo de Excelência em Turbulência” um projeto apoiado pela FAPERJ e pelo CNPq (Processo No E-26/171.198/2003).

Os Editores

Agradecimentos



Relação de Autores

Capítulo 1

página 1

Fernando Pereira Duda
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 2

página 17

Fábio Ramos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Ricardo Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Roger Temam
Department of Mathematics
Indiana University, Bloomington
IN 47405-5701
USA

Capítulo 3

página 37

Luca Moriconi
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 4**página 99**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

José Luiz da Silva Neto
Programa de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Capítulo 5**página 173**

Juliana B. R. Loureiro
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Fernando T. Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 6**página 253**

Daniel Cruz
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade Federal do Pará
Belém 66075-970 Brasil

Fernando Pinho
Depto. de Eng. Mecânica
Universidade do Porto
Porto 4200-465
Portugal

Capítulo 7**página 341**

José Luiz Fontoura
Depto. de Engenharia Mecânica
Universidade de Brasília
Brasília, D.F. 70910-900
Brasil

Capítulo 8

página 405

Alexandre T. P. Alho
Depto. Engenharia Naval e Oceânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro 21945-970
Caixa Postal 68530 Brasil

Anderson Ilha
Diretoria de Metrologia Científica
Instituto Nacional de Metrologia
Duque de Caxias, 22050-050
Rio de Janeiro Brasil

Capítulo 7

Transferência de calor em escoamentos turbulentos parietais

7.1 Introdução

Uma parcela significativa dos textos de introdução ao estudo da turbulência adota como ponto de partida a descrição das sete características físicas dominantes deste regime de escoamento que, de forma muito resumida, são as seguintes:

- natureza irregular ou randômica;
- alta difusividade;
- grandes números de Reynolds;
- vorticidade e tridimensionalidade;
- dissipação elevada;
- fenômeno do continuum;
- realização do escoamento e não do fluido.

Do ponto de vista das aplicações de engenharia a característica turbulenta mais importante é sua capacidade de difundir massa, calor e quantidade de movimento. Nos trocadores de calor, por exemplo, sabe-se que somente o efeito da passagem de regime laminar para turbulento é capaz de aumentar a ordem de grandeza dos parâmetros que definem a eficiência deste tipos de máquina.

Neste capítulo são abordados aspectos essenciais à modelagem numérica dos fluxos de calor que se estabelecem em escoamentos turbulentos dilatáveis, nos

quais as alterações de massa específica são provocadas apenas por variações de temperatura e se processam de acordo com a equação de estado de gás perfeito.

Existem diferentes técnicas capazes de levar a bom termo a simulação numérica da difusão turbulenta parietal de calor. Para aplicações de engenharia, onde versatilidade e custos computacionais razoáveis são requisitos necessários, as opções disponíveis não são numerosas. Este trabalho mostra uma formulação direcionada para aplicações de engenharia. Para tanto são apresentadas as equações básicas que regem o fenômeno, a formulação estatística necessária a representação numérica da turbulência, alternativas para o fechamento do sistema de equações médias, características de alguns modelos de turbulência, particularidades da camada limite turbulenta de velocidade e de temperatura e alguns exemplos de aplicação da metodologia proposta.

Na seleção dos temas a serem abordados, principalmente no que se refere aos modelos de turbulência, prevaleceram os tópicos diretamente ligados a metodologia de simulação apresentada, não existindo intenção de produzir-se um trabalho de revisão sobre simulação numérica de escoamentos turbulentos. Entretanto, motivado pela relevância formal do tema, foi incluído no texto o desenvolvimento analítico que conduz a dedução das equações evolutivas para o tensor de Reynolds e para o vetor fluxo turbulento de calor.

7.2 As equações instantâneas

7.2.1 Introdução

O transporte de energia térmica por escoamentos turbulentos parietais acontece em variadas situações de interesse industrial. O fluxo de calor entre fronteiras sólidas e fluido bem como o transporte de energia térmica pelo escoamento se estabelece por meio de diferentes processos físicos, incluindo difusão molecular, difusão turbulenta, convecção e advecção.

Em tais condições a relação de dependência existente entre os processos de transporte de calor e de quantidade de movimento é vinculada por variações das propriedades termodinâmicas do fluido, causadas pela ação de gradientes de temperatura e de pressão. No sistema de equações que representa matematicamente os princípios conservativos aplicados ao fluxo turbulento parietal de calor, a dependência entre os campos de temperatura e velocidade provoca o acoplamento das equações de conservação da energia e de quantidade de movimento e o comportamento não-linear da equação de conservação da energia.

A independência entre os campos de velocidade e temperatura pode ser considerada sempre que as propriedades termodinâmicas do fluido em escoamento, em particular massa específica, viscosidade dinâmica, condutividade térmica e calor específico a pressão constante, não variem de forma significativa com os gradientes de temperatura e pressão presentes no escoamento. Esta condição leva ao desacoplamento entre as equações de conservação da energia e de quantidade de movimento e tornar linear o comportamento da equação de conservação da energia.

7.2.2 Fluxo turbulento de calor em escoamentos parietais dilatáveis

O escoamento aqui considerado é, no caso mais geral, turbulento, parietal, incompressível, permanente, monofásico e homogêneo, constituído por um fluido newtoniano com comportamento termodinâmico de gás perfeito.

Os princípios gerais de conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia, formulados por análise diferencial sobre volume de controle inercial, são representados pelas equações da continuidade, de Navier-Stokes e da energia. As formulações vetoriais completas desta equações são as seguintes:

1) equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho \mathbf{U}) = 0; \quad (7.1)$$

2) equação de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho \mathbf{U} * \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \bullet \Pi + \rho \mathbf{g}; \quad (7.2)$$

3) equação da energia,

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho \mathbf{U} e) = \underbrace{\nabla \bullet (p \mathbf{U})}_1 - \underbrace{\nabla \bullet \mathbf{q}}_2 + q''' + \underbrace{\nabla \bullet (\Pi \cdot \mathbf{U})}_3 + \underbrace{\rho \mathbf{g} \bullet \mathbf{U}}_4. \quad (7.3)$$

Nas equações (7.1), (7.2) e (7.3), ρ representa a massa específica, t o tempo, \mathbf{U} é o vetor velocidade, p é a pressão termodinâmica, Π é o tensor das tensões viscosas, \mathbf{g} é o vetor aceleração gravitacional, e representa a energia total específica, \mathbf{q} é o fluxo de calor que acontece por difusão molecular e q''' representa a taxa de geração de energia interna por unidade de volume. Os símbolos “ \bullet ”, “ $*$ ” e “ \cdot ” representam, respectivamente, produto escalar, produto diádico e produto contraído.

O tensor das tensões viscosas para fluidos newtonianos é definida como

$$\Pi = \lambda \nabla \bullet (\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}) + \mu \left[\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^t \right],$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, μ e λ são os coeficientes de viscosidade molecular e de viscosidade volumétrica, também denominada como segundo coeficiente de viscosidade, que se relacionam por meio da hipótese de Stokes (1849) como

$$3\lambda + 2\mu = 0.$$

Na equação da energia, equação (7.3), o fluxo difusivo de calor representado no termo 2, é definido pela equação constitutiva de Fourier

$$\mathbf{q} = -k \nabla T,$$

onde k é a condutividade térmica do meio e T sua temperatura absoluta. As chaves 1 e 4 contêm respectivamente, os fluxos de energia associada ao trabalho de escoamento produzido pelos campos de pressão e gravitacional. A chave 3 representa o fluxo de energia dissipada pelas ação das forças viscosas.

As relações termodinâmicas que vinculam energia específica e , energia interna específica e_i , entalpia específica h , temperatura absoluta T e a equação de estado para gás perfeito permitem substituir, na equação (7.3), a energia específica e_i pela a entalpia específica h ou pela temperatura absoluta T . Neste trabalho será adotada a formulação baseada na temperatura absoluta, sob a forma

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T \right) = \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p \right) + \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \Pi : \nabla \mathbf{U}, \quad (7.4)$$

onde o símbolo c_p representa o calor específico a pressão constante, “ $'''$ ” representa produto duplamente contraído ente os tensores Π e $\nabla \mathbf{U}$, β é o coeficiente de expansão térmica definido como

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

Para facilitar a apresentação das equações, a partir deste ponto a notação vetorial é substituída por notação indicial e por sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Desta forma as formulações vetoriais (7.1), (7.2) e (7.4) são agora representadas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (7.6)$$

e

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + U_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (7.7)$$

Nas equações, (7.5), (7.6) e (7.7), x_i representa as coordenadas espaciais e o tensor das tensões τ_{ij} , é representado por

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right], \quad (7.8)$$

sendo δ_{ij} o operador delta de Kronecker. Na equação (7.7), a hipótese de gás perfeito implica em $\beta T = 1$. Para grandes variações de temperatura é possível representar as variações da viscosidade dinâmica por

$$\mu = aT^n. \quad (7.9)$$

Para o ar as constantes materiais a e n da equação (7.9) valem $3,68 \times 10^{-7} \frac{m^2}{sK}$ e $0,685$, respectivamente. A variação termodinâmica da massa específica é representada pela equação de estado de gás perfeito,

$$p = \rho R T, \quad (7.10)$$

onde R é a constante do gás.

7.2.3 A adimensionalização das equações instantâneas

No processo de adimensionalização das equações, (7.5), (7.6), (7.7) e (7.10) as escalas características de comprimento, velocidade, temperatura, massa específica, viscosidade dinâmica e condutividade térmica empregadas são representadas por: L , U_0 , T_0 , ρ_0 , μ_0 e k_0 . As variáveis adimensionais adotadas são:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \frac{x_i}{L}, & \hat{t} &= \frac{U_0}{L}t, & \hat{u}_i &= \frac{u_i}{U_0}, & \hat{T} &= \frac{T - T_0}{T_0}, \\ \hat{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}, & \hat{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0}, & \hat{k} &= \frac{k}{k_0}, & \hat{\tau}_{ij} &= \frac{L\tau_{ij}}{U_0\mu_0}. \end{aligned}$$

O processo de adimensionalização do campo de pressão é conduzido de forma a simplificar o sistema de equações adimensionais. Para tanto é feita uma representação preliminar do campo de pressão $p(x_i, t)$ por meio de duas parcelas que representam a média espacial do campo de pressão e as oscilações locais de pressão entorno da média espacial, de forma que

$$p(x_i, t) = p_m(t) + p_f(x_i, t), \quad (7.11)$$

sendo $p_m(t)$ o valor médio espacial do campo de pressão e $p_f(x_i, t)$ a oscilação local de pressão. Com base na decomposição (7.11) são definidas parcelas adimensionais de pressão denominadas \underline{p} e \hat{p} , tais que

$$\underline{p} = \frac{p_f}{\rho_0 U_0^2} = \frac{p - p_m}{\rho_0 U_0^2} \quad (7.12)$$

e

$$\hat{p} = \frac{p}{p_0}, \quad (7.13)$$

onde p_0 é a pressão de referência definida por $p_0 = \rho_0 R T_0$. No processo de adimensionalização das equações (7.5), (7.6), (7.7) e (7.10) surgem os seguintes números adimensionais:

- número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0},$$

que relaciona as forças de inércia com as forças viscosas;

- número de Prandtl

$$\text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{k_0},$$

que relaciona a difusão cinemática com a difusão térmica;

- número de Froude

$$\text{Fr} = \frac{U_0^2}{\|g_i\|L},$$

que relaciona força de inércia com força gravitacional;

- número de Mach de referência

$$M_0 = \frac{U_0}{a_0},$$

que relaciona a velocidade de referência do escoamento U_0 com a velocidade de referência de propagação do som no ar a_0 ,

$$a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}.$$

A constante de gás perfeito R e o coeficiente isentrópico γ podem ser expressos como funções dos calores específicos a pressão e a volume constantes, c_p e c_v , pelas relações

$$R = c_p - c_v$$

e

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Para estabelecer uma relação de conexão entre \underline{p} , \hat{p} , p_m e p_f é suficiente substituir os valores de $U_0 = M_0 \sqrt{\gamma RT_0}$ e de $p = \hat{p} p_0$ em (7.12). Este processo leva a equação

$$\hat{p} = M_0^2 \gamma \underline{p} + \frac{p_m}{p_0}. \quad (7.14)$$

Para simplificar a notação das equações, as variáveis adimensionais de velocidade, espaço, massa específica, temperatura absoluta, viscosidade dinâmica, condutividade térmica e tensão cisalhante são doravante renomeadas como U_i , x_i , ρ , T , μ , k e τ_{ij} . O sistema resultante de equações adimensionalizadas assume a forma que se segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &\quad - \frac{2}{3 \text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) \right] + \frac{1}{\text{Fr}} \rho \frac{g_i}{\|g\|}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \frac{M_0^2 (\gamma - 1)}{\text{Re}} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \\ \hat{p} &= \rho (T + 1). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Observa-se no sistema de equações resultantes do processo de adimensionalização, equações (7.15), que a metodologia dispensada ao campo de pressão por meio das equações (7.11), (7.12), (7.13) e (7.14) produz os seguintes resultados:

- Na equação de Navier-Stokes em (7.15) o gradiente da pressão adimensional preserva apenas a parcela \underline{p} , função da flutuação de pressão $p_f(x_i, t)$. A participação de \underline{p} restrita a equação da quantidade de movimento é consequência da natureza dinâmica desta parcela do campo de pressão, sendo sua variação acoplada apenas às variações do campo de velocidade.
- Nas equações adimensionais de energia e de estado o processo de adimensionalização preserva a parcela \hat{p} , definida a partir da pressão total p . A presença de \hat{p} nas equações da energia e de estado é consequência da natureza termodinâmica desta parcela do campo de pressão, associada apenas ao campo de temperatura.

7.2.4 Escoamentos dilatáveis

Na formulação do sistema de equações adimensionais (7.15) são considerados as seguintes hipóteses simplificativas: escoamentos subsônicos e incompressíveis de gás perfeito com números de Mach inferiores a 0,3; variações na massa específica provocadas somente pela ação de gradientes de temperatura; ausência de fontes de geração de energia interna.

Para escoamentos subsônicos com baixos números de Mach, Foulachier (1972) mostra que a dissipação viscosa só é significativa em uma região muito restrita do escoamento, situada na vizinhança imediata das paredes sólidas, não sendo significativa a contribuição do termo que representa o fluxo de trabalho dissipado pelas forças viscosas, podendo ser suprimido da equação da energia sem consequências perceptíveis nos resultados.

O sistema de equações para escoamentos dilatáveis

O sistema dimensional de equações que descreve o escoamento de fluidos que se comportam com gás perfeito, equações (7.5), (7.6), (7.7) e (7.10), quando particularizado para escoamentos dilatáveis, sofre alteração apenas na equação da energia, equação (7.7), pois nesta circunstância física os termos de dissipação viscosa e de variação de pressão, no tempo e no espaço, são negligenciáveis e permitem a adoção da forma simplificada

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (7.16)$$

O sistema adimensional de equações para escoamentos dilatáveis

Para o sistema adimensional de equações são necessárias algumas considerações referentes a adimensionalização adotada para o campo de pressão. Para baixos valores do número de Mach a componente termodinâmica do campo de pressão \hat{p} , equação (7.14), pode se representada pela relação

$$\hat{p} = \frac{p_m}{p_0},$$

que, substituída na equação de estado adimensional, resulta na expressão

$$\frac{p_m}{p_0} = \rho(T + 1). \quad (7.17)$$

Nos escoamentos onde a média espacial do campo de pressão não varia com o tempo, a pressão média pode ser definida como pressão de referência,

$$p_m = p_0.$$

Na equação (7.17) esta condição gera a equação de estado característica dos escoamentos dilatáveis, nos quais a massa específica é função apenas da temperatura do fluido em escoamento, ou seja,

$$\rho(T + 1) = 1.$$

Se às hipóteses simplificativas já consideradas for ainda acrescida a suposição de não variação da viscosidade dinâmica μ e de condutividade térmica k com a temperatura, então o sistema de equações adimensionais (7.15) poderá ser representado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{\text{Fr}} \rho \frac{g_i}{\|g\|}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \\ \rho(T + 1) &= 1. \end{aligned} \quad (7.18)$$

No sistema de equações (7.18) μ e k são constantes com a temperatura o que permite, a bem da simplicidade, considerar os valores adimensionais

$$\mu = 1 \quad \text{e} \quad k = 1.$$

7.3 Formulação estatística para escoamentos dilatáveis

A resolução analítica do sistema de equações (7.18) não é um procedimento viável para a grande maioria dos escoamentos de interesse prático. Apenas soluções numéricas, implementadas computacionalmente, permitem a modelagem de escoamentos turbulentos complexos. Entretanto, a resolução numérica direta das

equações instantâneas, demanda esforço computacional de grande porte. Anderson, Tannehill e Pletcher (1984) estimam que para simular numericamente o comportamento de um único vórtice turbulento é necessária uma malha de cálculo tridimensional com resolução mínima de dez nós e que, para um escoamento parietal típico, a relação entre as escalas de comprimento dos menores vórtices turbulentos e o comprimento característico do escoamento é da ordem de 10^{-3} . Como consequência, malhas de cálculo necessárias para discretizar um único centímetro cúbico deste tipo de escoamento, necessitam cerca de 10^5 nós.

Outra avaliação da ordem de grandeza das malhas de cálculo necessárias à simulação numérica direta da turbulência, proposta por Chen e Jaw (1998) por meio de análise dimensional, estabelece uma relação mínima possível entre o número de nós da malha de cálculo N e o número de Reynolds do escoamento Re , definida como

$$N \approx Re^{\frac{9}{4}},$$

indicando, por exemplo, que a simulação numérica direta de um escoamento turbulento com número de Reynolds da ordem 10^5 , necessitará uma malha de cálculo com cerca de 10^{11} nós.

A resolução numérica direta de escoamentos turbulentos, além do elevado custo computacional provocado pelo tamanho das malhas de cálculo, tem ainda o custo associado ao tratamento estatístico necessário para filtrar as principais tendências e características do escoamento turbulento calculado.

Outra possibilidade de abordagem deste problema é a substituição das equações instantâneas de Navier-Stokes, por formulações médias. Empregando esta alternativa obtém-se grande redução no custo de processamento numérico, sobretudo pela possibilidade de uso de malhas de cálculo muito menos refinadas que as necessárias à simulação numérica direta.

O uso de equações médias para a simulação numérica de escoamentos turbulentos, tem como maior desvantagem a diminuição na generalidade da solução obtida, provocada pela perda de informação que acompanha o processo de transformação de equações instantâneas em equações médias.

A obtenção de equações médias a partir de um conjunto de equações instantâneas, é composto por duas etapas distintas. Inicialmente é feita a substituição de variáveis instantâneas por funções estatísticas. Em uma segunda etapa é calculado o valor médio das equações resultantes da substituição de variáveis.

O processo de substituição de variáveis instantâneas por funções estatísticas, deve ser conduzido de acordo com as características físicas fundamentais do escoamento turbulento a ser modelado. Para escoamentos com massa específica constante, as variáveis instantâneas são melhor representadas por funções estatísticas definidas pela decomposição de Reynolds (1895). Para escoamentos com massa específica variável as variáveis instantâneas são modeladas de forma mais eficiente por meio do emprego combinado das decomposições de Favre (1965) e de Reynolds (1895).

As funções empregadas na modelagem estatística de uma variável instantânea genérica $A_i(x_i, t)$, função do espaço x_i e do tempo t , são formadas por uma com-

binação de parcelas que representam o valor médio da função e suas flutuações entorno desta média, ou seja

$$A_i(x_i, t) = a_i(x_i, t) + a'_i(x_i, t),$$

onde $a_i(x_i, t)$ representa o valor médio de $A_i(x_i, t)$ e $a'_i(x_i, t)$ sua flutuação entorno do valor médio.

A parcela média $a_i(x_i, t)$ pode ser definida por meio de três conceitos distintos. Média estatística, média temporal ou média espacial. A definição mais ampla é a da média estatística, calculada sobre um número n de realizações, suficientemente grande para poder representar o comportamento médio da variável, de forma que

$$a_i(x_i, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [A_i(x_i, t)]_{(j)},$$

sendo j o indexador das realizações. A média temporal é baseada no comportamento da variável instantânea ao longo de um intervalo de tempo de duração conveniente, definida por

$$a_i(x_i) = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma} \int_t^{t+\Gamma} A_i(x_i, t) dt, \quad (7.19)$$

onde t representa o instante do tempo no qual se inicia o evento em estudo e Γ o tamanho do intervalo de tempo considerado, longo o suficiente para poder bem representar o comportamento médio da variável.

O conceito de média espacial é fundamentado nos valores assumidos pela variável instantânea sobre um domínio espacial V , grande o suficiente para permitir a caracterização do comportamento médio da variável, sob a forma

$$a_i(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V A_i(x_i, t) dV.$$

As médias temporais são adequadas para o tratamento de turbulência estacionária, as médias espaciais para a turbulência homogênea. Se a turbulência for homogênea e estacionária, as médias estatística, temporal e espacial apresentam valores iguais. Esta condição é conhecida como *Hipótese de Ergodicidade*. Neste estudo, direcionado para turbulência estacionária, será adotado apenas o conceito de média temporal.

A parcela $a'_i(x_i, t)$, representativa das flutuações no entorno do valor médio $a_i(x_i, t)$, é uma variável aleatória centrada, que se caracteriza por apresentar média temporal nula. Adotando a barra superior como representação de média temporal, e aplicando o conceito definido em (7.19) a variável aleatória centrada $a'_i(x_i, t)$, obtém-se

$$\overline{a'_i(x_i, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [A_i(x_i, t) - a_i(x_i, t)] dt = a_i(x_i) - \overline{a_i(x_i, t)} = 0,$$

já que, por definição, $\overline{a_i(x_i, t)} = a_i(x_i)$.

Para que as variáveis instantâneas possam ser modeladas estatisticamente e aplicadas às equações representativas do sistema de equações (7.18), são apresentadas regras de manipulação algébrica dos operadores estatísticos. Para tanto são definidas três variáveis instantâneas genéricas A , B e C , modeladas estatisticamente por suas parcelas média e de flutuação, respectivamente a e a' , b e b' , c e c' , de forma que

$$A = a + a', \quad B = b + b' \quad \text{e} \quad C = c + c'.$$

Os valores médios das variáveis instantâneas A , B e C são iguais a

$$\overline{A} = a, \quad \overline{B} = b \quad \text{e} \quad \overline{C} = c,$$

já que

$$\overline{a'} = 0, \quad \overline{b'} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{c'} = 0.$$

São também verdadeiras as seguintes relações

$$\begin{aligned} \overline{aa'} &= \overline{bb'} = \overline{cc'} = \overline{ab'} = \overline{a'b} = \overline{ac'} = \overline{a'c} = \overline{bc'} = \overline{b'c} = 0, \\ \overline{A^2} &= a^2 + \overline{a'^2}, \quad \overline{B^2} = b^2 + \overline{b'^2} \quad \text{e} \quad \overline{C^2} = c^2 + \overline{c'^2}, \\ \overline{AB} &= ab + \overline{a'b'}, \\ \overline{ABC} &= abc + a\overline{(b'c')} + b\overline{(a'c')} + c\overline{(a'b')} + \overline{a'b'c'}. \end{aligned}$$

Sendo a média temporal um operador linear, é comutativo com outros operadores lineares, de modo que

$$\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} \quad \text{e} \quad \overline{\left(\int A dx\right)} = \int \overline{A} dx = \int a dx.$$

7.3.1 Funções estatísticas

Nos escoamentos com massa específica constante, a modelagem estatística de uma variável instantânea genérica $A_i(\mathbf{x}, t)$, é feita de forma eficiente pela decomposição de Reynolds (1895). Para escoamentos com massa específica variável é necessário o uso combinado das decomposições de Reynolds (1895) e da decomposição ponderada pela massa, conforme indicam os trabalhos de Van Driest (1951), Favre (1965) e mais recentemente Laufer e Ludloff (1970). Estas duas técnicas baseiam-se nas seguintes definições:

1) A decomposição de Reynolds (1895) propõe que

$$A_i(\mathbf{x}, t) = \overline{a_i}(\mathbf{x}, t) + a'_i(\mathbf{x}, t),$$

onde $\overline{a_i}(\mathbf{x}, t)$ representa o valor médio da variável $A_i(\mathbf{x}, t)$, $a'_i(\mathbf{x}, t)$ é uma variável aleatória centrada capaz de representar as flutuações de $A_i(\mathbf{x}, t)$ entorno do valor

médio $\bar{a}_i(\mathbf{x}, t)$. Para turbulência estacionária o emprego da média temporal na determinação do valor médio da variável (7.19) é a melhor opção. Nesta condição a decomposição de Reynolds (1895) é representada por

$$A_i(\mathbf{x}, t) = \bar{a}_i(\mathbf{x}) + a'_i(\mathbf{x}, t). \quad (7.20)$$

2) A decomposição de Favre (1965) propõe que

$$A_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{a}_i(\mathbf{x}, t) + a''_i(\mathbf{x}, t),$$

onde $\tilde{a}_i(\mathbf{x}, t)$ representa uma média ponderado pela massa de $A_i(\mathbf{x}, t)$, definida como

$$\tilde{a}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\overline{\rho A_i(\mathbf{x}, t)}}{\bar{\rho}} \quad (7.21)$$

e $a''_i(\mathbf{x}, t)$ é uma variável aleatória, não centrada, capaz de representar flutuações de $A_i(\mathbf{x}, t)$ entorno da média ponderada pela massa $\tilde{a}_i(\mathbf{x}, t)$. Para aplicações envolvendo turbulência estacionária, o emprego da média temporal (7.19) para cálculo do valor médio da função $\tilde{a}_i(\mathbf{x}, t)$ é o procedimento mais eficaz. Nesta circunstância a decomposição de Favre (1965) é representada por

$$A_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{a}_i(\mathbf{x}) + a''_i(\mathbf{x}, t). \quad (7.22)$$

As principais características funcionais das funções estatísticas usadas por Favre (1965) são ilustradas pelas seguintes proposições:

- existe equivalência entre as decomposições de Reynolds (1895) e de Favre (1965),

$$A_i = \bar{a}_i + a'_i = \tilde{a}_i + a''_i;$$

- as flutuações a'_i e a''_i não são equivalentes:

$$\begin{aligned} \overline{a'_i} &= 0 && \text{(variável aleatória centrada),} \\ \overline{a''_i} &\neq 0 && \text{(variável aleatória não centrada);} \end{aligned}$$

- se $A_i = \tilde{a}_i + a''_i$ e $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ então:

$$\overline{\rho A_i} = \overline{\bar{\rho} \tilde{a}_i} + \overline{\bar{\rho} a''_i} + \overline{\rho' \tilde{a}_i} + \overline{\rho' a''_i},$$

como

$$\begin{aligned} \overline{\rho' \tilde{a}_i} &= 0, \\ \overline{\bar{\rho} a''_i} &= \bar{\rho} \overline{a''_i}, \end{aligned}$$

e

$$\overline{\bar{\rho} a''_i} = \bar{\rho} \overline{a''_i},$$

então a relação que define $\overline{\rho A_i}$ se reduz a

$$\overline{\rho A_i} = \overline{\rho \tilde{a}_i} + \overline{\rho a_i''} + \overline{\rho' a_i''},$$

a definição de \tilde{a}_i , equação (7.21), garante que

$$\overline{\rho A_i} = \overline{\rho \tilde{a}_i}, \quad (7.23)$$

ou seja

$$\overline{\rho a_i''} + \overline{\rho' a_i''} = 0,$$

ou ainda,

$$\overline{a_i''} = -\frac{\overline{\rho' a_i''}}{\overline{\rho}}; \quad (7.24)$$

- o valor médio temporal da equação da equação (7.20),

$$\overline{A_i} = \overline{a_i},$$

associado ao valor médio temporal da definição (7.22), sob a forma,

$$\tilde{a}_i - \overline{A_i} = -\overline{a_i''},$$

e do valor de $\overline{a_i''}$, definido em (7.24), resulta na relação

$$\tilde{a}_i - \overline{a_i} = \frac{\overline{\rho' a_i''}}{\overline{\rho}};$$

- se $A_i = \tilde{a}_i + a_i''$, $B_i = \tilde{b}_i + b_i''$ e $\rho = \overline{\rho} + \rho'$ então, com base nas proposições anteriores, demonstra-se que:

$$\overline{\rho A_i B_i} = \overline{\rho \tilde{A}_i \tilde{B}_i} + \overline{\rho a_i'' b_i''}. \quad (7.25)$$

7.3.2 Um modelo estatístico para escoamentos dilatáveis

Nos escoamentos turbulentos com massa específica variável, o emprego da decomposição de Reynolds na modelagem estatística das variáveis instantâneas, tem como consequência indesejável a geração de um número muito grande de incógnitas suplementares. Para ilustrar esta característica considere-se, como exemplo, a obtenção da equação média da continuidade empregando somente a decomposição de Reynolds.

A decomposição de Reynolds (7.20) para as variáveis instantâneas de massa específica e velocidade resulta nas relações

$$\begin{aligned} \rho &= \overline{\rho} + \rho', \\ U_i &= \overline{u_i} + u_i'. \end{aligned}$$

Os valores instantâneos de ρ e U_i que compõem a equação da continuidade adimensional (7.18), são substituídos por suas respectivas formulações estatísticas

$$\frac{\partial (\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial [(\bar{\rho} + \rho') (\bar{u}_i + u'_i)]}{\partial x_i} = 0,$$

ou seja

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\rho} u'_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho' \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho' u'_i}{\partial x_i} = 0.$$

Calculando a média temporal de cada termo desta equação, conforme definido em (7.19), obtém-se a equação média da continuidade:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i}}{\partial x_i} = 0.$$

A incógnita suplementar resultante deste processo, constituída pela correlação entre flutuações de massa específica e de velocidade $\overline{\rho' u'_i}$, pode ser inteiramente evitada com o uso da decomposição de Favre (1965), como é demonstrado no prosseguimento do texto.

Para escoamentos dilatáveis é suficiente adotar a decomposição de Favre (1965) para velocidade e temperatura e conservar a decomposição de Reynolds (1895) para massa específica, pressão e tensão cisalhante, por meio das relações

$$\begin{aligned} U_i(\mathbf{x}, t) &= \tilde{u}_i(\mathbf{x}) + nu''_i(\mathbf{x}, t), \\ T(\mathbf{x}, t) &= \tilde{T}(\mathbf{x}) + T''(\mathbf{x}, t), \\ p(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x}, t), \\ \rho(\mathbf{x}, t) &= \bar{\rho}(\mathbf{x}) + \rho'(\mathbf{x}, t), \\ \tau_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\tau}_{ij}(\mathbf{x}) + \tau'_{ij}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (7.26)$$

7.3.3 As equações médias

O processo de obtenção das equações médias tem como ponto de partida as equações instantâneas de conservação de massa, quantidade de movimento e energia e a equação de estado, equações (7.1), (7.6), (7.7) e (7.10). Neste processo são consideradas também as hipóteses simplificativas que caracterizam a equação de energia para escoamentos dilatáveis. A obtenção das equações médias é sempre obtida em duas etapas distintas. Inicialmente são substituídas as variáveis instantâneas por suas decomposições estatísticas seguindo as relações definidas em (7.26). Em uma segunda etapa são calculadas os valores médios de todos os termos do sistema de equações. Como resultado deste procedimento obtém-se sucessivamente a equação média da continuidade:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0, \quad (7.27)$$

a equação média de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_j'' u_i''} \right] + \bar{\rho} g_i, \quad (7.28)$$

onde

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right], \quad (7.29)$$

a equação média da energia

$$\bar{\rho} c_p \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - \bar{\rho} c_p \overline{u_i'' T''} \right) \quad (7.30)$$

e a equação média de estado

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T}. \quad (7.31)$$

7.3.4 As equações médias adimensionais

Para a obtenção do sistema de equações adimensionais médias, repete-se o processo aplicado na seção anterior tendo como ponto de partida o sistema de equações instantâneas adimensionais, equações (7.18). O resultado deste processo são as equações médias de continuidade

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (7.32)$$

a equação média de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i)}{\partial x_j} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right] \\ & - \frac{2}{3 \text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{\text{Fr}} \bar{\rho} \frac{g_i}{\|g_i\|}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

a equação média da energia

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - \overline{\rho u_i'' T''} \right) \quad (7.34)$$

e a equação média de estado

$$\bar{p} (\tilde{T} + 1) = 1. \quad (7.35)$$

A formulação estatística que origina os sistemas de equações médias tem como consequência indesejável a criação de novas incógnitas, formadas por correlações que surgem nas equações de Reynolds e da energia. Estas novas variáveis são respectivamente:

- as tensões de Reynolds, expressas pelas correlações entre flutuações de velocidade, $\overline{\rho u_i'' u_j''}$;
- o fluxo turbulento de calor, representado pelas correlações entre flutuações de velocidade e temperatura, $\overline{\rho u_i'' T''}$.

As incógnitas suplementares resultantes da formulação estatística são responsáveis pela indeterminação do sistemas de equações médias. A modelagem das correlações, $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ e $\overline{\rho u_i'' T''}$, é condição necessária e suficiente para o levantamento da indeterminação original do sistema de equações médias.

7.4 O problema de fechamento

O tensor das tensões de Reynolds, sendo simétrico, tem apenas seis componentes independentes. O fluxo turbulento de calor é uma grandeza vetorial. Desta forma, o sistema de equações médias é composto por quinze variáveis dependentes, sendo seis delas correspondentes ao tensor de Reynolds, três componentes do fluxo turbulento de calor, três componentes de velocidade e as grandezas escalares de pressão, temperatura e massa específica. O sistema de equações médias é integrado por seis componentes: uma de continuidade, três da conservação de quantidade de movimento, uma de energia e a equação de estado termodinâmico.

O sistema de equações médias, composto por (7.32), (7.33), (7.34) e (7.35), contém quinze incógnitas e apenas seis equações, o que caracteriza uma indeterminação matemática. No estudo da turbulência este tipo de problema, originado pelo emprego de formulação estatística, é conhecido como problema de fechamento das equações médias.

Para resolver o problema de fechamento é necessário que as nove correlações que compõem o tensor de Reynolds e o fluxo turbulento de calor, sejam modeladas. Existem dois tipos de encaminhamento para solucionar o problema de fechamento:

- soluções constitutivas, baseadas no modelamento empírico e/ou experimental do tensor de Reynolds e do fluxo turbulento de calor;
- soluções evolutivas, capazes de equacionamento matemático da evolução, no espaço e no tempo, do tensor de Reynolds e do fluxo turbulento de calor.

7.4.1 Formulação evolutiva para o problema de fechamento

As soluções evolutivas para o problema de fechamento são constituídas por equações deduzidas analiticamente, capazes de representar o comportamento de correlações, como o tensor de Reynolds e o fluxo turbulento de calor, no espaço e no tempo. Desta forma o fechamento do sistema de equações médias composto por (7.32), (7.33), (7.34) e (7.35), pode ser realizado com auxílio das equações capazes de modelar a evolução temporal e espacial de $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ e de $\overline{\rho u_i'' T''}$.

Entretanto, no processo de dedução destas equações, o número de novas correlações geradas é sempre maior do o número de equações resultantes, impedindo

que a indeterminação matemática possa ser levantada, sem que as novas incógnitas criadas sejam também determinadas.

Para que a formulação evolutiva seja efetiva é necessário que, em algum ponto do processo de representação analítica, as novas correlações sejam modeladas a partir de informações experimentais. Desta forma as soluções evolutivas, a princípio independentes da geometria e das características dinâmicas do escoamento, acabam perdendo generalidade na medida em que são introduzidos particularidades experimentais no sistema de equações.

Embora as soluções evolutivas apresentem maior coerência conceitual, ainda não conseguem competir com os modelos de turbulência baseados na hipótese de Boussinesq (1872), nem na qualidade dos resultados obtidos nem nos recursos computacionais necessários a sua implementação.

O processo de obtenção das equações evolutivas tem início com a dedução da equação da energia cinética do escoamento médio, etapa preliminar do processo dedutivo da equação evolutiva do tensor de Reynolds e também da equação da energia cinética de turbulência. A equação evolutiva para fluxo turbulento de calor é obtida de forma análoga.

Energia cinética do escoamento médio

O processo de dedução da equação evolutiva do tensor de Reynolds, para escoamentos compressíveis sob baixos números de Mach, tem início com a dedução da equação da energia cinética para o escoamento médio, que tem como ponto de partida a equação média de Reynolds, (7.28), desconsiderando seu termo de força de campo gravitacional,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j u_i}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tau_{ij}} - \overline{\rho u_j'' u_i''} \right). \quad (7.36)$$

O processo de dedução é implementado em quatro etapas. As três transformações iniciais alteram a dimensão original da equação, força por unidade de volume, para energia cinética por unidade de volume. As quatro fases da dedução são as seguintes:

1) produto escalar entre a componente \tilde{u}_j de velocidade média e a componente \tilde{u}_i da equação (7.36),

$$\tilde{u}_j \left[\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_k u_i}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\tau_{ik}} - \overline{\rho u_k'' u_i''} \right) \right]; \quad (7.37)$$

2) produto escalar entre a componente \tilde{u}_i de velocidade média e a componente \tilde{u}_j da equação (7.36),

$$\tilde{u}_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_k u_j}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\tau_{jk}} - \overline{\rho u_k'' u_j''} \right) \right]; \quad (7.38)$$

3) soma das componentes (7.37) e (7.38), e reordenamento conveniente dos termos, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = & -\tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\tau}_{ik} - \overline{\rho u_k'' u_i''}) \\ & + \tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho u_k'' u_j''}) ; \end{aligned} \quad (7.39)$$

4) todos os termos da equação (7.39) possuem dimensão de energia cinética por unidade de volume, para a obtenção da equação evolutiva da energia cinética do escoamento médio é suficiente considerar $i = j$ e dividir a equação por 2, o que resulta na expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_k \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) = & -\tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\tilde{u}_i (\bar{\tau}_{ik} - \overline{\rho u_k'' u_i''}) \right] \\ & + \overline{\rho u_k'' u_i''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} - \bar{\tau}_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

ou ainda,

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \left(\frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right)}_1 = \underbrace{-\tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_2 + \underbrace{\tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k}}_3 - \underbrace{\tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_k'' u_i''})}_4. \quad (7.41)$$

As equações (7.40) e (7.41) são duas formulações possíveis da equação da energia cinética do escoamento médio. O detalhamento dos termos e a interpretação física proposta por Cebeci (1987) são apresentados na seqüência.

• **Termo 1:**

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\tilde{u}_k \left(\frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) \right],$$

representa a taxa de variação total da energia cinética do escoamento médio. É denominada de “termo de ganho de energia cinética do escoamento médio por advecção.”

• **Termo 2:**

$$-\tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i},$$

representa o trabalho de escoamento feito pelas forças geradas pelo campo médio de pressão, responsável pela produção de energia cinética do escoamento médio.

• **Termo 3:**

$$\tilde{u}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k},$$

representa a ação dissipativa da viscosidade molecular.

• **Termo 4:**

$$-\tilde{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u_k'' u_i''} \right) = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tilde{u}_i \overline{\rho u_k'' u_i''} \right)}_{(4a)} + \underbrace{\overline{\rho u_k'' u_i''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}}_{(4b)}.$$

O termo (4a) representa o transporte espacial de energia cinética do escoamento médio feito por flutuações turbulentas, ou seja, é o transporte difusivo turbulento da energia cinética do escoamento médio. O termo (4b) representa a produção de energia cinética turbulenta feita a partir da energia cinética das componentes médias de velocidade, sendo por isso denominado de “termo de perda para a turbulência”.

O tensor de Reynolds

A dedução da equação evolutiva para o tensor de Reynolds em escoamentos idilataáveis, é similar a dedução da equação evolutiva da energia cinética do escoamento médio, equação (7.41). O ponto de partida é a equação instantânea de Navier Stokes, equação (7.6), que a menos de seu termo de força de campo gravitacional, é dada por

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}. \quad (7.42)$$

O processo dedutivo pode ser apresentada em cinco etapas distintas. A alteração da dimensão da equação de Navier-Stokes (7.42), força por unidade de volume, para a dimensão do tensor de Reynolds (7.61), energia cinética por unidade de volume, é feita nos três passos iniciais do processo. A transformação da formulação instantânea, (7.42), em formulação média estatística, (7.61), é feita na quarta etapa. A forma final da equação evolutiva é o resultado obtido na quinta etapa. As cinco fases do processo dedutivo são as seguintes:

1) início do processo de alteração dimensional da equação de Navier-Stokes (7.42) com o produto escalar entre a componente U_j de velocidade instantânea e a componente i da equação (7.42)

$$U_j \left[\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_k U_i)}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right]; \quad (7.43)$$

2) repetição do passo inicial para a componente j da equação, via produto escalar entre a componente U_i de velocidade instantânea e a componente j da equação (7.42)

$$U_i \left[\frac{\partial(\rho U_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_k U_j)}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right]; \quad (7.44)$$

3) complementação do processo de alteração dimensional por meio da soma das componentes (7.43) e (7.44) com reordenamento conveniente de suas parcelas

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i U_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_k U_i U_j) = -U_j \frac{\partial p}{\partial x_i} - U_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}; \quad (7.45)$$

4) obtenção do valor médio da equação (7.45), por meio da substituição de suas variáveis instantâneas por decomposições estatísticas definidas em (7.26),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(\bar{\rho} + \rho') (\tilde{u}_i + u_i'') (\tilde{u}_j + u_j'')] + \\ & \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{\rho} + \rho') (\tilde{u}_k + u_k'') (\tilde{u}_i + u_i'') (\tilde{u}_j + u_j'')] = \\ & - (\tilde{u}_j + u_j'') \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p') - (\tilde{u}_i + u_i'') \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} + p') \\ & + (\tilde{u}_j + u_j'') \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\tau_{ik} + \tau_{ik}'}) + (\tilde{u}_i + u_i'') \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\tau_{jk} + \tau_{jk}'}) \end{aligned} \quad (7.46)$$

e pela obtenção do valor médio da equação (7.46), conforme estabelecem as propriedades (7.23) e (7.25) das funções estatísticas empregadas no processo, resultando na formulação

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \overline{\rho u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k} + \overline{\tilde{u}_k \rho u_i'' u_j''} + \overline{\tilde{u}_j \rho u_i'' u_k''} + \overline{\tilde{u}_i \rho u_j'' u_k''}) \\ & + \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = -\tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} - \overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \overline{\tau_{ik}}}{\partial x_k} \\ & + \tilde{u}_i \frac{\partial \overline{\tau_{jk}}}{\partial x_k} + \overline{u_j'' \frac{\partial \tau_{ik}'}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial x_k}}; \end{aligned} \quad (7.47)$$

5) término do processo de dedução da formulação que modela o comportamento físico das tensões turbulentas, com a subtração entre as equações (7.47) e (7.39), necessária para eliminar da formulação a ser obtida todos os termos de energia cinética do escoamento médio, definidos por (7.39). O resultado da subtração entre (7.47) e (7.39) é a forma final da equação, dada por

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{D}{Dt} (\overline{\rho u_i'' u_j''})}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k'' \rho u_i'' u_j''})}_2 = - \underbrace{\overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} - \overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}}}_3 + \underbrace{\overline{u_j'' \frac{\partial \tau_{ik}'}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial x_k}}}_4 \\ & \underbrace{- \overline{\rho u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}}}_5. \end{aligned} \quad (7.48)$$

A interpretação do significado físico dos termos da equação evolutiva do tensor de Reynolds para escoamentos com massa específica variável e baixos números de Mach, (7.48), proposta por Cebeci (1987) é a seguinte:

- **Termo 1:**

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} (\overline{\rho u''_i u''_j})}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u''_i u''_j})}_{1a} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{u}_k \overline{\rho u''_i u''_j})}_{1b},$$

é a derivada substantiva do tensor, composta por sua derivada local $1a$, e pela parcela $1b$ que representa o transporte advectivo do tensor de Reynolds, feito pelo escoamento médio.

- **Termo 2:**

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u''_k \rho u''_i u''_j}),$$

representa o transporte difusivo do tensor de Reynolds, feito por flutuações turbulentas de velocidade.

- **Termo 3:**

$$-\underbrace{u''_j \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} - u''_i \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_j}}_3 = -\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u''_j p'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u''_i p'})}_{3a} \right] + \underbrace{p' \left(\frac{\partial u''_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} \right)}_{3b},$$

representa o trabalho de escoamento feito pelas componentes flutuantes de pressão e de velocidade, sobre o volume de controle. A componente $3a$ representa a difusão das flutuações de pressão feita por flutuações turbulentas de velocidade. A parcela $3b$ modela a redistribuição de energia cinética turbulenta feita por flutuações de pressão. O efeito da natureza escalar do campo de pressão sobre as tensões turbulentas é responsável pela denominação de “termo de retorno a isotropia” dado a parcela $3b$.

- **Termo 4:**

$$\underbrace{u''_j \frac{\partial \overline{\tau'_{ik}}}{\partial x_k} + u''_i \frac{\partial \overline{\tau'_{jk}}}{\partial x_k}}_4 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u''_j \tau'_{ik}} + \overline{u''_i \tau'_{jk}})}_{4a} - \underbrace{\tau'_{ik} \frac{\partial u''_j}{\partial x_k} - \tau'_{jk} \frac{\partial u''_i}{\partial x_k}}_{4b},$$

termo de dissipação da energia cinética das flutuações turbulentas promovida por flutuações das forças viscosas. A parcela $4a$ representa o transporte difusivo das flutuações de velocidade feito por componentes flutuantes das forças viscosas. A parcela $4b$ é a dissipação turbulenta das flutuações de velocidade feita pelas flutuações das tensões viscosas.

- **Termo 5:**

$$\overline{\rho u''_i u''_k} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u''_j u''_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k},$$

sendo o único termo da equação que contém gradientes de velocidade média, representa a produção das tensões de Reynolds devida a ação das componentes do campo médio de velocidade

Energia cinética de turbulência

A energia cinética de turbulência é uma das parcelas da diagonal do tensor de Reynolds. Sua equação evolutiva é um caso particular da equação do tensor $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ e correspondendo a metade do valor da expressão obtida para a condição de $i = j$, ou seja,

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} \right)}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k'' \frac{1}{2} \rho u_i'' u_i''} \right)}_2 = \underbrace{-\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}}}_3 + \underbrace{\overline{u_i'' \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}}}_4 - \underbrace{\overline{\rho u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}}}_5. \quad (7.49)$$

O detalhamento e interpretação do significado físico propostos por Cebeci (1987), para os cinco termos que compõem a equação evolutiva da energia cinética de turbulência, (7.49), são apresentados na seqüência:

• **Termo 1:**

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} \right)}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} \right)}_{(1a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tilde{u}_k \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} \right)}_{(1b)},$$

onde (1a) é a parcela transiente da equação e (1b) o termo advectivo, responsável pelo transporte da energia cinética das flutuações turbulentas feito pelo escoamento médio.

• **Termo 2:**

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k'' \frac{1}{2} \rho u_i'' u_i''} \right),$$

representa a difusão turbulenta da energia cinética turbulenta, ou seja, é a parcela da energia cinética turbulenta difundida pelas flutuações turbulentas de velocidade.

• **Termo 3:**

$$-\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}},$$

é o trabalho de escoamento feito pelas flutuações turbulentas sobre o volume de controle, sendo por isso trabalho negativo.

• **Termo 4:**

$$\underbrace{\overline{u_i'' \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}}}_4 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i'' \tau'_{ik}} \right)}_{(4a)} - \underbrace{\overline{\tau'_{ik} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}}}_{(4b)},$$

representa o trabalho total de cisalhamento viscoso feito por flutuações turbulentas de velocidade, composto por uma parcela de transporte espacial da energia cinética turbulenta devido às forças viscosas, termo (4a), e pela dissipação viscosa promovida por flutuações turbulentas de velocidade, termo (4b).

• **Termo 5:**

$$\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k},$$

é um termo de produção de energia cinética turbulenta promovida pela energia cinética do escoamento médio.

Fluxo turbulento de calor

A dedução da equação evolutiva do fluxo turbulento de calor é obtida por um processo semelhante ao empregado na obtenção das equações evolutivas do tensor de Reynolds (7.48) e da energia cinética turbulenta (7.49). O processo dedutivo tem como ponto de partida as formulações conservativas da equação de quantidade de movimento (7.6) e energia (7.7), que são agora simplificadas pela não inclusão do termo de força gravitacional de (7.6) e pela redução do segundo membro de (7.7) que passa a ser composto apenas pelo termo de difusão molecular de energia, aqui representado por ϕ_i ,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j U_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) \quad (7.50)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i T) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_i). \quad (7.51)$$

Inicialmente são deduzidas as equações evolutivas da componente u_i'' de flutuação de velocidade e T'' de flutuação de temperatura.

A dedução da equação evolutiva para u_i'' se inicia com a substituição das variáveis instantâneas de (7.50) pelas formulações estatísticas propostas pela decomposição de Favre (1965), definidas em (7.26),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(\bar{p} + \rho')(\tilde{u}_i + u_i'')] + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{p} + \rho')(\tilde{u}_j + u_j'')(\tilde{u}_i + u_i'')] = \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p') + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij}), \end{aligned} \quad (7.52)$$

sendo o valor médio da equação (7.52) dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_j'' u_i''}). \quad (7.53)$$

A equação evolutiva para a componente u_i'' de flutuação de velocidade é obtida subtraindo-se da equação (7.52), sua parcela média (7.53), operação que resulta na expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} u_i'' + \rho' \tilde{u}_i + \rho' u_i'') + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_k u_i'' + \bar{\rho} u_k'' \tilde{u}_i + \bar{\rho} u_k'' u_i'' + \rho' \tilde{u}_k \tilde{u}_i \\ + \rho' \tilde{u}_k u_i'' + \rho' u_k'' \tilde{u}_i + \rho' u_k'' u_i'') = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau'_{ij} + \overline{\rho u_k'' u_i''}). \end{aligned} \quad (7.54)$$

A equação evolutiva para T'' é resultante de um processo análogo ao empregado na dedução de (7.54), que tem início com a substituição das variáveis instantâneas de (7.51) pelas formulações estatísticas da decomposição de Favre (1965), definidas por (7.26),

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{T} + T'')] + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{u}_i + u_i'')(\tilde{T} + T'')] = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\phi}_i + \phi_i'). \quad (7.55)$$

O valor médio da equação (7.55) é dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{T}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\phi}_i - \overline{\rho u_i'' T''}). \quad (7.56)$$

A equação evolutiva para a componente T'' de flutuação de velocidade é obtida subtraindo-se da equação (7.55), sua parcela média (7.56). O resultado deste procedimento é a expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} T'' + \rho' \tilde{T} + \rho' T'') + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k T'' + \bar{\rho} u_k'' \tilde{T} + \bar{\rho} u_k'' T'' + \rho' \tilde{u}_k \tilde{T} \\ + \rho' \tilde{u}_k T'' + \rho' u_k'' \tilde{T} + \rho' u_k'' T'') = \frac{\partial}{\partial x_k} (\phi_k' + \overline{\rho u_k'' T''}). \end{aligned} \quad (7.57)$$

A equação de transporte do fluxo turbulento de calor $\overline{\rho u_i'' T''}$ é o valor médio da equação que resulta da soma entre a equação (7.54) multiplicada por T'' e a equação (7.57) multiplicada escalarmente por u_i'' . Este processo tem como resultado a expressão

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i'' T''})}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\tilde{u}_k \rho u_i'' T''})}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k'' \rho u_i'' T''})}_3 = \\ - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p' T''}) + p' \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}}_4 - \underbrace{\overline{\rho u_k'' T''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} - \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_k}}_5 + \underbrace{\overline{T''} \frac{\partial \tau_{ik}'}{\partial x_k} + u_i'' \frac{\partial \phi_k'}{\partial x_k}}_6. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Os significados físicos das seis parcelas componentes da equação (7.58) conforme Chassaing *et al.* (2002), são apresentados na seqüência:

- **Termo 1:**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i'' T''}),$$

representa a variação temporal do fluxo turbulento de calor.

- **Termo 2:**

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\tilde{u}_k \rho u_i'' T''}),$$

representa o transporte advectivo da correlação $\overline{\rho u_i'' T''}$, feito pelo escoamento médio.

• **Termo 3:**

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k'' \rho u_i'' T''} \right),$$

representa o transporte difusivo da correlação $\overline{\rho u_i'' T''}$, feito pelas flutuações turbulentas.

• **Termo 4:**

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p' T''} \right) + \overline{p' \frac{\partial T''}{\partial x_i}},$$

representa a difusão das flutuações de temperatura feita pelas flutuações do campo de pressão.

• **Termo 5:**

$$-\underbrace{\overline{\rho u_k'' T''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}}_{5a} - \underbrace{\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_k}}_{5b},$$

5a e 5b são as únicas parcelas da equação (7.58) contendo gradientes dos campos médios de velocidade e de temperatura. O termo 5a representa a produção de fluxo turbulento de calor devido a ação do campo de velocidade média. O termo 5b representa a produção de tensões turbulentas devida a ação do campo de temperatura média.

• **Termo 6:**

$$\underbrace{\overline{T'' \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}}}_{6a} + \underbrace{\overline{u_i'' \frac{\partial \phi'_k}{\partial x_k}}}_{6b},$$

as parcelas 6a e 6b representam dissipação das flutuações de temperatura e de velocidade causadas por interferência destrutiva provenientes das oscilações na difusão molecular de quantidade de movimento e de calor. A dissipação das flutuações de temperatura, 6a, é devida a ação das flutuações das tensões cisalhantes de Navier. A dissipação das flutuações de velocidade, 6b, é consequência das flutuações da difusão térmica molecular.

7.4.2 Formulação constitutiva para o problema de fechamento

A primeira tentativa de modelamento constitutivo para o tensor de Reynolds, deve-se a Joseph Boussinesq (1842-1929) e baseou-se na hipótese de existência de viscosidade turbulenta, o que descobriu-se mais tarde ser um equívoco, já que a turbulência é função do escoamento e não pode ser caracterizada por meio de uma propriedade termodinâmica do fluido. Apesar da inconsistência física do modelo,

os bons resultados permitidos pela aproximação de Boussinesq explicam seu emprego por parcela significativa dos modelos de turbulência aplicados atualmente em problemas de interesse industrial.

Em 1872 Joseph Boussinesq submeteu, à Academia de Ciências da França, um ensaio com 680 páginas intitulado “Essai sur la théorie des eaux courantes”. Neste trabalho Boussinesq propunha um modelo físico que deveria explicar o aumento da ordem de magnitude do coeficiente de atrito aparente, observado quando um escoamento laminar transiciona para regime turbulento. Segundo Boussinesq esta mudança de comportamento seria causado por um coeficiente de atrito suplementar, vinculado a turbulência do escoamento e independente da viscosidade dinâmica do fluido.

A hipótese de Boussinesq (1872) apresenta uma formulação para o tensor de Reynolds análoga à formulação de Navier para o tensor das tensões viscosas, equação (7.8). Nesta analogia o campo de tensões geradas pelo “atrito turbulento” é função de uma viscosidade dinâmica turbulenta hipotética μ_T e dos gradientes de velocidade média do escoamento turbulento, de forma que

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

onde u'_k e \bar{u}_k representam a flutuação de velocidade e a média temporal da velocidade, nos termos da decomposição estatística de Reynolds (1895) para a velocidade instantânea do escoamento.

Para evitar a anulação da diagonal do tensor nos escoamentos com massa específica constante, é adotada a correção proposta por Jones e McGuirk (1979):

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \mu_t \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij}, \quad (7.59)$$

onde δ_{ij} é o operador delta de Kronecker e κ a energia cinética de turbulência, definida pela relação

$$\kappa = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}. \quad (7.60)$$

Nos escoamentos com massa específica variável o tensor de Reynolds é representado pela relação

$$-\overline{\rho u''_i u''_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij}, \quad (7.61)$$

A forma mais simples de modelar o fluxo turbulento de calor adota uma estratégia semelhante a da aproximação de Boussinesq (1872), ao estabelecer correspondência entre o fluxo turbulento de calor e o gradiente de temperatura média de forma que

$$-\overline{\rho u''_i T''} = \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}, \quad (7.62)$$

onde Pr_t representa uma propriedade turbulenta, chamada de número de Prandtl turbulento, considere-se constante em alguns modelos de turbulência apesar da inexistência de argumentação física capaz de justificar esta aproximação.

Uma visão ampla e atual sobre a modelagem de fluxos turbulentos de calor em escoamentos gasosos parietais, pode ser encontrada no trabalho de Nagano (2002).

As soluções constitutivas propostas para o tensor de Reynolds, equação (7.61), e para o fluxo turbulento de calor, equação (7.62), baseiam-se no conceito de viscosidade turbulenta μ_T , inconsistente em pelos menos três aspectos:

- a viscosidade turbulenta μ_T não é uma propriedade termodinâmica do fluido, sendo função apenas do escoamento;
- as direções principais do tensor de Reynolds não são necessariamente iguais às direções principais do tensor taxa de deformação, o que é incompatível com a natureza escalar da viscosidade turbulenta μ_T ;
- Hanjalic e Launder (1972) mostram que em alguns escoamentos complexos como o jato parietal e escoamento em duto assimétrico, a tensão cisalhante e o gradiente de velocidade média não se anulam simultaneamente como prevê (7.61).

As incoerências da hipótese de Boussinesq são significativas em todas as situações nas quais o escoamento apresenta:

- mudanças bruscas na taxa de deformação média;
- existência de fontes produtoras de taxa de deformação independentes do escoamento.

As mudanças bruscas na taxa de deformação média, produzem variações nas tensões de Reynolds não relacionadas com as escalas de espaço e tempo do escoamento médio (Wilcox, 1998). A existência de cisalhamento originada por fontes independentes do escoamento, provoca o surgimento de anisotropia nas componentes normais das tensões de Reynolds. Entre as circunstâncias capazes de produzir mudanças bruscas na taxa de deformação média, ou provocar o surgimento de fontes externas produtoras de cisalhamento, as mais frequentes são encontradas nos escoamentos que se processam em:

- geometrias curvas;
- geometrias capazes de produzir escoamentos secundários;
- situações que provoquem a estratificação ou rotação do fluido;
- situações que provoquem o descolamento de camada limite;
- escoamentos médios tridimensionais.

Apesar destes inconvenientes a hipótese de Boussinesq continua sendo, segundo Anderson, Tannehil e Pletcher (1984) e Chen e Jaw (1998), a solução mais adotada para o problema de fechamento em aplicações industriais. Entretanto a simples adoção da hipótese de Boussinesq não resolve o problema de fechamento, pois é

necessário que sejam conhecidos os valores da viscosidade turbulenta ao longo de toda massa fluida em escoamento. A solução completa para o problema de fechamento, independentemente da natureza constitutiva ou evolutiva da formulação, é denominada de modelo de turbulência.

7.4.3 Modelos de turbulência de origem constitutiva

Modelos baseados na teoria do comprimento de mistura

Os modelos de turbulência mais antigos são formados por variadas formas de associação entre a hipótese de Boussinesq (1872) e a teoria do comprimento de mistura de Prandtl (1925).

O modelo algébrico de Prandtl (1925) é baseado em uma interpretação simplificada da turbulência, pela qual as flutuações turbulentas são oscilações de aglomerados macroscópicos de fluido, ao longo da direção perpendicular ao escoamento médio, caracterizadas por um percurso com comprimento médio ℓ denominado comprimento de mistura. Com base neste modelo Prandtl (1925) propõem, para a camada limite bidimensional, uma relação entre a viscosidade turbulenta ν_T , o gradiente da velocidade longitudinal média na direção normal à parede $\left| \frac{du}{dy} \right|$ e o comprimento de mistura ℓ , definida por

$$\mu_T = \bar{\rho} \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right|.$$

Para camadas limites tridimensionais o modelo de Prandtl (1925) propõem que

$$\mu_T = \bar{\rho} \ell^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

O modelo de Prandtl (1925) apresenta bons resultados para a região interna da camada limite de escoamentos turbulentos não descolados. Na região interna o escoamento é fortemente condicionado pela proximidade da parede, permitindo que a natureza escalar do modelo seja eficaz na representação do cisalhamento. Entretanto, na região externa da camada limite, os resultados não são bons, mesmo para escoamentos turbulentos bem comportados.

É necessário ressaltar que, mesmo na região interna da camada limite, situações especiais como rugosidade, gradientes adversos de pressão, porosidade, camada de mistura e baixos números de Reynolds, tornam ineficaz a formulação algébrica de Prandtl. Além das limitações já mencionadas existe ainda a que decorre da necessidade de conhecimento prévio do comprimento de mistura ℓ . Dependendo das circunstâncias esta pode ser a maior dificuldade para aplicação eficaz do modelo de Prandtl.

Vários modelos de turbulência mais sofisticados foram desenvolvidos visando o aperfeiçoamento da formulação original de Prandtl. Em sua maioria estes modelos diferenciam-se pela forma adotada para a determinação numérica do comprimento

de mistura ℓ . Boas referências sobre modelos de turbulência baseados no comprimento de mistura de Prandtl são as obras de Anderson, Tannehil e Pletcher (1984) e de Wilcox (1998).

Modelos completos

Os modelos de turbulência que dispensam o conhecimento prévio de quaisquer escalas características da turbulência, são chamados de modelos completos. Dentre os modelos deste tipo destacam-se os modelos de turbulência a duas equações.

Os modelos a duas equações definem a viscosidade turbulenta a partir de escalas de velocidade e tempo, calculadas por meio de suas equações evolutivas. A escala de velocidade é caracterizada pela energia cinética de turbulência κ , sendo a escala de tempo determinada a partir da taxa de dissipação da energia cinética de turbulência ε ou da taxa de dissipação específica da energia cinética de turbulência ω . Quando é adotada a dissipação turbulenta ε como escala de tempo, o comprimento, tempo e velocidade característicos são definidos, respectivamente por:

$$\begin{aligned}\ell_c &= \frac{\kappa^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}, \\ t_c &= \frac{\kappa}{\varepsilon}, \\ u_c &= \kappa^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Se for empregada a dissipação turbulenta específica ω como escala de tempo, o comprimento, tempo e velocidade característicos são definidos, respectivamente por:

$$\begin{aligned}\ell_c &= \frac{\kappa^{\frac{1}{2}}}{\omega}, \\ t_c &= \frac{1}{\omega z}, \\ u_c &= \kappa^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Os modelos de turbulência a duas equações são hoje a ferramenta de engenharia mais usada na simulação numérica de escoamentos turbulentos parietais, sendo a relação custo-benefício destes modelos de turbulência a principal razão de seu sucesso em aplicações técnicas e científicas.

O modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência

Entre os modelos de turbulência a duas equações, o mais usado na simulação de turbulência parietal é o modelo $\kappa - \varepsilon$ proposto por Jones e Launder (1972), com equações evolutivas de κ e de ε trabalhadas por Launder e Spalding (1974) e por Hanjalic e Launder (1972). São muitos os trabalhos de análise das características

operacionais e de desempenho do modelo $\kappa - \varepsilon$, sobressaindo-se os feitos por Rodi (1984) e Nallasamy (1987).

O modelo $\kappa - \varepsilon$ de Jones e Launder (1972), concebido para escoamentos com massa específica constante, tem como princípio a modelagem da viscosidade turbulenta proposta por Prandtl-Kolmogorov,

$$\nu_T = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (7.63)$$

sendo $C_\mu = 0,09$ uma constante de calibração experimental.

Para escoamento com massa específica variável a relação de Prandtl Kolmogorov pode ser definida como

$$\mu_T = C_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\varepsilon}. \quad (7.64)$$

O uso da lei de Prandtl-Kolmogorov introduz duas novas variáveis: κ e ε . Para evitar a indeterminação do sistema de equações são necessárias equações evolutivas capazes de representar o comportamento das escalas turbulentas κ e ε . A equação evolutiva para a energia cinética turbulenta κ , é um caso particular da equação do tensor de Reynolds, sendo constituída pela diagonal do tensor,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = & - \underbrace{\bar{\rho} u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_1 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j'' \kappa + \overline{u_j'' p'})}_2 - \underbrace{\tilde{u}_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}_3 \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{ji}' u_i''}) - \overline{\tau_{ji}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}}_4. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Na equação (7.65) são encontradas correlações estatísticas que necessitam modelagem, já que representam incógnitas suplementares no sistema de equações. As hipóteses adotadas nesta modelagem são as mesmas usadas para o escoamento com massa específica constante.

O termo que compõem a chave 1 da equação (7.65), é um termo de produção que não necessita modelação especial pois é determinado a partir da hipótese de Boussinesq, equação (7.61). Os termos componentes da chave 2 da equação (7.65), são termos de transporte difusivo turbulento que podem ser modelados de forma análoga ao fluxo turbulento de calor, ou seja,

$$\bar{\rho} \tilde{u}_j'' \kappa + \overline{u_j'' p'} = \frac{\mu_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j},$$

onde σ_κ representa uma constante de calibração experimental. O valor mais frequentemente adotado é $\sigma_\kappa = 1$.

Os termos componentes da chave 3 da equação (7.65), respectivamente termo de trabalho de pressão e termo de dilatação de pressão, são modelados como funções

do número de Mach turbulento do escoamento, conforme Sarkar (1992), Zeman (1993) e Ristorcelli (1993), sendo o número de Mach turbulento definido como

$$M_T = \sqrt{\left(\frac{2\kappa}{a^2}\right)},$$

onde a é a velocidade do som em condições normais de pressão e temperatura. Considerando o objetivo deste trabalho, voltado para escoamentos que se processam sob baixos números de Mach, nos quais as alterações de massa específica são provocadas unicamente por variações de temperatura, os termos de trabalho de pressão e de dilatação de pressão podem ser desconsiderados nestas condições como demonstram os resultados de Brun (1988).

O primeiro dos dois termos referenciados pela chave número 4 da equação (7.65), termo $\overline{\tau'_{ji}u''_i}$, representa difusão molecular sendo sua modelação mais frequente

$$\overline{\tau'_{ji}u''_i} = \mu \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}.$$

A correlação restante da chave 4 representa a dissipação de energia cinética de turbulência por unidade de volume, sendo definida como

$$\overline{\tau'_{ji} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j}} = \bar{\rho} \varepsilon.$$

A aplicação deste conjunto de hipóteses simplificativas tem como resultado uma formulação da equação evolutiva da energia cinética de turbulência, específica para escoamentos cuja massa específica varie apenas devido a variações de temperatura, sob a forma

$$\bar{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + \bar{\rho} \wp - \bar{\rho} \varepsilon, \quad (7.66)$$

com

$$\wp = -\overline{u''_i u''_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}.$$

Para escoamentos com massa específica variável que fazem uso das médias de Favre, a equação evolutiva para a taxa de dissipação da energia cinética de turbulência, ε , foi estabelecida pelos trabalhos de Kollmann (1979) e Vandromme (1980). A aplicação desta equação em simulação numérica é ainda problemática pela dificuldade de modelação de suas correlações. O trabalho de Jones (1979) mostra que é possível o uso da forma incompressível da equação evolutiva de ε , proposta por Hanjalic e Launder (1972) e Tennekes e Lumley (1973), para escoamentos com massa específica variável sem comprometimento significativo dos resultados obtidos, ou seja,

$$\bar{\rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \bar{\rho} \left(\frac{\varepsilon}{\kappa} \right) \wp - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \left(\frac{\varepsilon^2}{\kappa} \right). \quad (7.67)$$

As constantes $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, e $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ são as mesmas adotadas nos escoamentos com massa específica constante, com determinação obtida por comparação entre resultados experimentais e numéricos.

7.5 Leis de parede

7.5.1 Introdução

A estrutura da camada limite turbulenta, conforme mostram os estudos experimentais de Klebanoff (1954) e de Kline *et al.* (1967), apresenta valores máximos da taxa de produção de energia cinética de turbulência, na região situada entre o fim da sub-camada laminar e início da camada de transição. Estes valores decaem rapidamente tanto na direção da parede, onde se anulam, como na direção oposta. O acentuado decaimento da taxa de produção de energia cinética de turbulência, que se observa a medida que em aumenta a distância até a parede, mantém-se até a parte intermediária da região logarítmica, diminuindo então muito gradualmente até o fim da camada limite. A complexidade física do escoamento, a intensidade dos gradientes de velocidade e às altas taxas de produção e dissipação de energia cinética existentes na parte interna da camada limite turbulenta, tornam a modelagem numérica do escoamento nesta região uma atividade de implementação cara e difícil.

Para modelar de forma eficaz a camada limite turbulenta foram desenvolvidas metodologias de simulação numérica direta, modelos de simulação de grandes escalas, modelos de turbulência tipo baixo-Reynolds e modelos de turbulência convencionais associados a leis de parede. As duas primeiras técnicas citadas, embora muito eficazes, são ainda ferramentas de pesquisa. A simulação numérica direta demanda grandes recursos computacionais, mesmo para escoamentos com geometrias simples e baixos números de Reynolds (Sandham, 2002). A simulação de grandes escalas exige calibração de suas constantes em função do escoamento a ser simulado, sendo difícil seu emprego em problemas com característica industriais (Laurence, 2002).

Os modelos de turbulência baixo-Reynolds são capazes de modelar a turbulência na proximidade imediata de paredes sólidas, entretanto apresentam dois inconvenientes que dificultam sua aplicação industrial:

- a intensidade dos gradientes de \mathbf{U} , κ e ε exige sempre a adoção de malhas de cálculo muito refinadas nas proximidades das paredes, aumentando muito o custo do processamento;
- as funções de amortecimento que permitem modelar o comportamento turbulento na vizinhança imediata das paredes são dependentes de sua geometria e das características dinâmicas do escoamento, restringindo assim a aplicabilidade destes modelos.

Entre as soluções adotadas em aplicações industriais, destacam-se as que empregam modelos de turbulência da família $\kappa - \varepsilon$, complementados por leis de parede

para a determinação explícita das condições de contorno de velocidade e temperatura, nos contornos físicos do domínio. As condições de contorno de velocidade e temperatura calculadas pelas leis de parede são implementadas implementadas nos modelos do tipo $\kappa - \varepsilon$ por meio de uma estratégia baseada em dois pontos:

- a malha de cálculo não cobre a vizinhança imediata das paredes sólidas do domínio, evitando a parte inicial da região interna da camada limite;
- nos contornos da malha de cálculo situadas na vizinhança imediata de fronteiras sólidas as condições de contorno de velocidade média e temperatura média são calculados explicitamente por meio de leis de parede, as demais variáveis turbulentas são estimadas por relações que variam com o modelo de turbulência adotado.

Com o emprego desta metodologia o trecho da região interna da camada limite onde é cara e difícil a modelagem numérica da turbulência, composta pela subcamada viscosa, região de transição e início da região logarítmica, é deixada fora da malha de cálculo, sendo o escoamento nesta região modelado de forma eficiente por leis de parede.

Por ser este trabalho direcionado para a modelagem dos fluxos turbulentos parietais de calor é apresentado na seqüência apenas o desenvolvimento básico relativo às leis de parede de temperatura. Para maiores detalhes sobre leis de parede de velocidade consultar Silveira Neto e Mansur (2003)

7.5.2 A camada limite turbulenta de temperatura

A interface sólido-líquido

Segundo Arpaci e Larsen (1984) a convecção não deve ser entendida como um modo fundamental de transporte de energia térmica, sendo preferível considerá-la como uma associação entre difusão molecular de calor e escoamento fluido. Este enfoque da convecção facilita seu estudo, particularmente no que se refere às trocas térmicas que se estabelecem entre o escoamento e sua fronteira sólida.

O surgimento de camada limite de temperatura em um escoamento parietal é sempre provocado pela existência de fluxo de calor entre o escoamento e seu contorno sólido. Para a caracterização do fluxo de calor parietal é necessário o conhecimento simultâneo do campo de velocidade, do campo de temperatura e das propriedades físicas dos meios fluido e sólido envolvidos no processo.

Denominando como q_p o fluxo de calor na parede, de h o coeficiente de transferência de calor por convecção, de T_p a temperatura na parede e de T_∞ a temperatura do fluido fora da camada limite térmica, é possível representar o fluxo de calor que se estabelece, entre a parede sólida e o escoamento, pela relação de Newton para convecção

$$q_p = h(T_p - T_\infty). \quad (7.68)$$

Independentemente da velocidade do escoamento, a condição de não escorregamento é responsável pela formação de uma película de fluido estagnado sobre toda

a superfície sólida em contato com o escoamento. O fluxo de calor q_p que cruza esta região estagnada é transportado por difusão molecular e pode ser modelado pela lei de Fourier,

$$q_p = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = h(T_p - T_\infty), \quad (7.69)$$

onde k representa a condutividade térmica, y é a direção do gradiente de temperatura e o sub-índice p refere-se a parede. Esta equação, adimensionalizada de forma trivial como,

$$-\frac{1}{T_p - T_\infty} \left[\frac{\partial T}{\partial (y/l)} \right]_p = \frac{hl}{k} = \text{Nu}, \quad (7.70)$$

origina o número de Nusselt (Nu), parâmetro adimensional representativo do fluxo de calor na interface sólido-líquido. Nesta relação l é uma escala característica de comprimento do escoamento.

Transferência de calor na camada limite turbulenta

A difusividade turbulenta, sendo um indicador da capacidade de transporte de quantidade de movimento, calor e massa é a propriedade turbulenta mais importante para a análise de problemas de engenharia que envolvem transferência de calor.

Para ilustrar a análise da difusão turbulenta de calor em escoamentos parietais, considere-se como realidade física de estudo um escoamento turbulento plenamente desenvolvido, confinado entre duas paredes planas horizontais e paralelas, submetidas a uma diferença de temperatura constante, responsável pela manutenção do fluxo de calor que se estabelece nesta circunstância entre as duas superfícies.

Para escoamento plenamente desenvolvido, o espaço entre as paredes é inteiramente tomado pela camada limite turbulenta, que em linhas gerais subdivide-se em duas porções com características muito diferenciadas. O escoamento que existe na proximidade da parede forma a região interna, fortemente condicionada pela geometria e pelo acabamento superficial da parede, composta por três sub-regiões distintas: uma camada laminar na vizinhança imediata da parede, uma região de transição onde o fluxo passa do regime laminar ao turbulento e a região onde o escoamento é totalmente turbulento, denominada de região logarítmica. A porção restante do escoamento da camada limite turbulenta forma a região externa ou região de esteira, pouco afetada pela parede e fortemente dependente de escoamentos externos, quando estes existem. A espessura da região externa da camada limite turbulenta é significativamente maior que a da região interna, nas camadas limites sobre placa plana, por exemplo, esta relação costuma ser de 4 para 1.

O fluxo de calor que se estabelece entre as paredes quente e fria cruza a camada limite turbulenta, sob a ação de diferentes mecanismos de transporte. Na interface sólido-fluido o calor atinge o fluido em movimento por meio de difusão molecular pura. No interior da sub-camada laminar o fluxo difusivo de calor é gradativamente substituído por advecção turbulenta, causada pelos pequenos vórtices encontrados na parte superior da região laminar e início da região de transição. A medida

que o fluxo de energia térmica passa pelas regiões de transição e logarítmica, intensifica-se a difusão turbulenta de calor, devido ao aumento nas dimensões dos vórtices. Na região externa da camada limite prevalece o transporte de calor feito pelas grandes estruturas turbulentas que, por suas características dimensionais e dinâmicas, maximizam o processo de difusão turbulenta de calor.

Formulação turbulenta para a camada limite de temperatura

O processo de formulação estatística da camada limite de temperatura parte da formulação média da equação da energia, equação (7.30), que particularizada para escoamentos permanentes com turbulência estacionária reduz-se a

$$\bar{\rho}c_p\tilde{u}_i\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i} - \bar{\rho}c_p\overline{u_i''T''}\right). \quad (7.71)$$

A equação da energia formulada desta maneira relaciona três diferentes mecanismos de transporte de calor: advecção criada pelo escoamento médio, difusão molecular e difusão turbulenta. No interior da camada limite turbulenta o peso que cada um destes três mecanismos, no transporte de energia térmica, varia com a região considerada, prevalecendo na subcamada laminar a difusão molecular que é gradativamente ultrapassada em importância pelos outros dois mecanismos, na medida em que se intensifica a turbulência com o aumento da distância a parede.

Para analisar os mecanismos de difusão de calor atuantes na camada limite turbulenta representa-se por q_i a densidade do fluxo de calor devido as difusões molecular e turbulenta,

$$-q_i = k\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i} - \bar{\rho}c_p\overline{u_i''T''},$$

o que torna possível reescrever a equação (7.71) em termos apenas dos fluxos advectivo e difusivo como

$$\bar{\rho}c_p\tilde{u}_i\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (7.72)$$

Para um escoamento turbulento parietal, estacionário, estatisticamente independente das direções longitudinais e transversais, o fluxo de calor na direção perpendicular à parede é constante em todo o domínio, ou seja,

$$|q_i| \cong (q)_y = \text{constante},$$

com

$$(q)_y = (q_m)_y + (q_t)_y,$$

onde $(q_m)_y$ e $(q_t)_y$ representam, respectivamente, as parcelas de transporte de calor feito por difusão molecular e turbulenta, ao longo da direção y normal a parede. O fluxo de calor que passa da parede para o escoamento considerado é representado pela relação

$$-(q)_y = k\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y} - \bar{\rho}c_p\overline{v''T''}, \quad (7.73)$$

onde v'' representa as flutuações de velocidade segundo a direção y e o sinal negativo no primeiro membro da equação indica que a propagação do fluxo de calor se dá sempre no sentido decrescente do campo de temperatura.

A correlação entre flutuações de velocidade e temperatura, $\overline{v''T''}$, têm no modelo algébrico clássico sua forma de representação mais simples como

$$-\overline{v''T''} = \alpha_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}, \quad (7.74)$$

onde α_t é uma difusividade térmica turbulenta de valor constante. Este tipo de representação para a correlação $\overline{v''T''}$ permite reescrever a equação (7.73) como

$$-(q)_y = (k + \rho c_p \alpha_t) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}. \quad (7.75)$$

O fluxo difusivo de calor na direção normal a parede, $(q)_y$, fora da sub-camada laminar é composto em larga medida pela difusão turbulenta de calor $(q_t)_y$, sendo modesta a parcela de energia transportada por difusão molecular, o que justifica uma aproximação do tipo

$$-(q)_y \cong (q_t)_y = \rho c_p \alpha_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}. \quad (7.76)$$

A determinação da difusividade turbulenta α_t no interior da camada limite pode ser feita de forma simplificada, por meio de uma adaptação do modelo de comprimento de mistura de Prandtl (1925), originalmente concebido para determinação da viscosidade turbulenta ν_t , por meio da relação

$$\alpha_T = \left[(\overline{v''^2}) \right]^{\frac{1}{2}} \ell, \quad (7.77)$$

onde ℓ é o comprimento de mistura a ser determinada localmente, com ordem de grandeza equivalente ao tamanho médio das maiores estruturas turbulentas no local considerado. A determinação de ℓ é baseada na tendência do tamanho médio das maiores estruturas turbulentas no interior da camada limite, diminuir com a proximidade da parede, permitindo que na região interna seja aceitável uma aproximação do tipo

$$\ell = Ky, \quad (7.78)$$

onde y é a distância normal à parede e K é a constante de von Kármán. Sabe-se que este tipo de solução somente é eficaz para escoamentos parietais sobre geometrias simples. Para escoamentos mais complexos o uso do comprimento de mistura e do modelo algébrico de turbulência devem ser empregados com cautela.

O emprego do modelo algébrico associado ao comprimento de mistura permite modelar a correlação $\overline{v''T''}$ por

$$\overline{v''T''} = |v''| \ell \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}, \quad (7.79)$$

o que permite determinar o campo de temperatura médio $\tilde{T}(y)$ como função do fluxo difusivo de calor na direção perpendicular à parede $(q_t)_y$ e do módulo da flutuação transversal de velocidade v'' , por meio da relação

$$-(q_T)_y = \rho c_p |v''| K y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}. \quad (7.80)$$

É importante lembrar que a equação (7.80) tem validade restrita às regiões de transição e logarítmica da parte interna da camada limite turbulenta, pois não considera a difusão molecular de calor que é o mecanismo de transporte predominante na sub-camada laminar.

Analogia de Reynolds

O emprego da teoria do comprimento de mistura de Prandtl na determinação da correlação $v''T''$ exige o conhecimento antecipado dos valores da flutuação transversal de velocidade v'' . Uma forma alternativa de determinação do campo de temperatura médio $\tilde{T}(y)$, pode ser feito por meio da analogia de Reynolds (1874), depois ampliada e particularizada por Prandtl (1910), von Kármán (1939) e Martinelli (1947).

Para escoamentos turbulentos a analogia de Reynolds (1874) é fundamentada na similaridade existente entre os fluxos difusivos turbulentos de calor e de quantidade de movimento. A explicação para esta semelhança é simples: são os mesmos vórtices turbulentos que difundem o calor e a quantidade de movimento. Representando os fluxos difusivos turbulentos de quantidade de movimento e de calor na direção normal a parede como

$$\tau_{yx} = \bar{\rho} \nu_T \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (7.81)$$

e

$$-q_y = \bar{\rho} c_p \alpha_T \frac{d\tilde{T}}{dy}, \quad (7.82)$$

a relação entre estes fluxos é dada por

$$-\frac{\tau_{yx}}{q_y} = \frac{1}{c_p} \frac{\nu_T}{\alpha_T} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{T}}. \quad (7.83)$$

Definindo o número de Prandtl turbulento Pr_t como a razão entre as difusividades turbulentas de quantidade de movimento ν_t e de calor α_t ,

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t}, \quad (7.84)$$

a equação (7.83) assume a forma

$$-\frac{\tau_{yx}}{q_y} = \frac{\text{Pr}_t}{c_p} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{T}}. \quad (7.85)$$

Para número de Prandtl turbulento Pr_t unitário, a integração da equação (7.85) entre a parede onde $\tilde{u} = 0$ e $\tilde{T} = T_p$ e a fronteira da camada limite, onde $\tilde{u} = u_\infty$ e $\tilde{T} = T_\infty$, resulta na equação

$$-\frac{\tau_p}{q_p} = \frac{u_\infty}{c_p (T_\infty - T_p)}, \quad (7.86)$$

onde o índice p para τ e q indica valores na parede.

A formulação generalizada para a analogia de Reynolds considera também a similaridade entre as difusões moleculares de quantidade de movimento e de calor. Partindo dos fluxos difusivos totais de quantidade de movimento e de calor, dados por

$$\tau_{yx} = \bar{\rho} (\nu + \nu_t) \frac{d\tilde{u}}{dy} \quad (7.87)$$

e

$$-q_y = \bar{\rho} c_p (\alpha + \alpha_t) \frac{d\tilde{T}}{dy}, \quad (7.88)$$

e empregando o desenvolvimento adotado para obter a equação (7.86), aos fluxos difusivos (7.87) e (7.88), chega-se a forma generalizada da analogia de Reynolds:

$$-\frac{\tau_p}{q_p} = \frac{1}{c_p} \frac{\nu + \nu_t}{\alpha + \alpha_t} \frac{u_\infty}{(T_\infty - T_p)}. \quad (7.89)$$

Para escoamentos nos quais os números de Prandtl molecular e turbulento são unitários, a equação (7.89) reduz-se a (7.86).

7.5.3 Dedução da lei de parede para a camada limite térmica

As camadas limites de temperatura e de velocidade apresentam semelhanças e discrepâncias importantes em suas estruturas físicas. As principais diferenças estão nas condições de contorno que definem suas fronteiras e na influência exercida em cada caso pelos números de Prandtl e Prandtl turbulento. Entre as semelhanças destaca-se a universalidade das leis de parede de velocidade e de temperatura.

A forma mais simples de obtenção da lei de parede para a camada limite térmica tem como ponto de partida a equação de energia para a camada limite que, sob notação cartesiana, ortogonal e bidimensional, considerando as hipóteses simplificativas que definem a estrutura da camada limite de Prandtl (1904), pode ser apresentada como

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial (q)_y}{\partial y} = 0, \quad (7.90)$$

onde

$$-(q)_y = \bar{\rho} c_p (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}.$$

Para um escoamento cisalhante simples sobre parede isotérmica, permanente, plenamente desenvolvido, com tensão cisalhante total τ constante, componente média

transversal de velocidade \tilde{v} nula e componente média longitudinal \tilde{u} , variando somente segundo a direção normal a parede y , a equação da energia reduz-se à forma

$$\frac{1}{\bar{\rho}c_p} \frac{\partial(q)_y}{\partial y} = 0,$$

o que demonstra a constância do fluxo de calor ao longo da direção y .

Para paredes isotérmicas com temperatura T_p especificada, o campo de temperatura média $\tilde{T}(x, y)$ é independente da direção x , ou seja $\tilde{T}(x, y)$ reduz-se a $\tilde{T}(y)$, o que permite a dedução da lei de parede de temperatura por integração da expressão do fluxo de calor ao longo da direção y entre a parede, onde $y = 0$ e $\tilde{T} = T_p$, e um ponto genérico Y com temperatura T ,

$$\int_{T_p}^T d\tilde{T} = -\frac{q_p}{\bar{\rho}c_p} \int_0^Y \frac{dy}{(\alpha + \alpha_t)}. \quad (7.91)$$

É rotina no estudo da camada limite turbulenta de temperatura o emprego de variáveis adimensionais de velocidade, comprimento e temperatura, respectivamente u^+ , y^+ e T^+ , também denominadas de variáveis de parede. Para tanto define-se inicialmente o comprimento adimensional y^+ , pela relação

$$y^+ = \frac{u_f Y}{\nu}, \quad (7.92)$$

onde u_f é a velocidade de atrito, definida como

$$u_f = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (7.93)$$

e τ_p é a tensão cisalhante na parede. A velocidade adimensional u^+ é definida como

$$u^+ = \frac{\tilde{u}}{u_f}. \quad (7.94)$$

A definição da temperatura adimensional T^+ é obtida por integração da equação (7.91), precedida pela substituição do comprimento y por seu equivalente adimensional y^+ e por redistribuição coerente dos demais termos, resultando na expressão

$$\frac{u_f \bar{\rho} c_p}{q_p} \int_{T_p}^T d\tilde{T} = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\alpha/\nu + \alpha_t/\nu}. \quad (7.95)$$

O resultado da integração do segundo membro da equação (7.95) define a temperatura adimensional T^+ ,

$$\frac{u_f \bar{\rho} c_p (T_p - T)}{q_p} = T^+, \quad (7.96)$$

o que permite rerepresentar a equação (7.95) como função das variáveis de parede y^+ , T^+ e do número de Prandtl,

$$T^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{(\text{Pr})^{-1} + \alpha_T/\nu}. \quad (7.97)$$

Tabela 7.1: Comprimento crítico y_c^+ como função de Pr para ar e água.

fluido	Pr	y_c^+
ar	0,7	13,2
água	5,9	7,55

Para que o processo de integração da equação (7.97) resulte em leis de parede consistentes, é fundamental que a natureza física da camada limite turbulenta seja respeitada. Na sub-camada laminar, predominam os efeitos da difusão molecular de calor e de quantidade de movimento, na região logarítmica são dominantes os efeitos da difusão turbulenta de calor e de quantidade de movimento. A existência de estruturas físicas diferenciadas exige um procedimento matemático que respeite estas diferenças. Para tanto o intervalo total de integração é dividido em dois sub-intervalos, capazes de representar as diferentes regiões da camada limite. O ponto de separação entre estas duas regiões, denominado comprimento crítico y_c^+ , é situado na parte intermediária da região de transição. Alguns autores como Kays e Crawford (1993) recomendam o emprego do comprimento crítico experimental para a camada limite turbulenta de velocidade sobre placa plana impermeável $y_c^+ = 10,8$. Pesquisadores da área de simulação numérica, como Jeandel, Buffat e Carriere (1986), adotam o comprimento crítico $y_c^+ = 11,6$, que representa a intersecção matemática entre o perfil linear de velocidade da sub camada laminar e o perfil logarítmico da região turbulenta. Para a lei de parede de temperatura o processo de determinação do valor de y_c^+ é mais complexo devido a sua dependência do número de Prandtl.

Em qualquer circunstância o processo de integração da equação adimensional deve ser feito considerando as diferenças de comportamento físico existentes entre a sub-camada laminar e a região turbulenta da camada limite, o que é estabelecido pela relação

$$T^+ = \int_0^{y_c^+} \frac{dy^+}{(\text{Pr})^{-1} + \alpha_t/\nu} + \int_{y_c^+}^{y^+} \frac{dy^+}{(\text{Pr})^{-1} + \alpha_t/\nu}, \quad (7.98)$$

onde o primeiro termo, integrado entre 0 e y_c^+ , representa a sub-camada laminar e o segundo, integrado entre y_c^+ e um ponto genérico y^+ , representa a região turbulenta da parte interna da camada limite turbulenta de temperatura.

O comprimento crítico da camada limite térmica y_c^+ só é igual a 10,8 para escoamento sobre placa plana impermeável de fluidos com número de Prandtl unitário. Na tabela 7.1 estão apresentados os valores do comprimento crítico y_c^+ para a camada limite térmica de ar e de água.

Na dedução da lei de parede de velocidade o procedimento adotado desconsidera o efeito da difusividade turbulenta de quantidade de movimento ν_t , na integração do termo correspondente a sub-camada laminar e, na integração da parcela turbulenta, despreza a difusão molecular de quantidade de movimento ν . Para a

lei de parede de temperatura um procedimento análogo é inadequado devido a possibilidade de grandes variações do número de Prandtl, que podem ser maiores do que 100 para fluidos muito viscosos e atingir valores da ordem de 0,001 para metais líquidos. Nos escoamentos de fluidos com valores do número de Prandtl muito maiores do que 1 a difusividade térmica turbulenta α_t , na sub-camada laminar, apesar de apresentar sempre pequenas intensidades é significativa por ter ordem de grandeza semelhante a da difusividade térmica molecular α . Contrariamente, para fluidos nos quais o número de Prandtl apresente ordens de grandeza semelhantes ou inferiores a unidade, a importância da difusividade térmica turbulenta α_t é inexpressiva na sub-camada laminar, devido aos altos valores da difusividade térmica molecular α . Na região turbulenta da camada limite de temperatura as tendências são opostas. Os valores da difusividade térmica turbulenta α_t são sempre elevadas e a difusividade térmica molecular α só assume valores significativos quando os números de Prandtl apresentam ordens de grandeza muito menores do que a unidade.

Na impossibilidade de um procedimento genérico, capaz de representar qualquer tipo de fluido, são deduzidas as leis de parede de temperatura correspondentes ao ar e a água, situação caracterizada por números de Prandtl com ordem de grandeza próxima da unidade, onde predominam as influências da difusividade térmica molecular α , na sub-camada laminar e da difusividade térmica turbulenta α_t , na região turbulenta da camada limite de temperatura. Esta configuração física permite reescrever a equação (7.98) como

$$T^+ = \text{Pr} \int_0^{y_c^+} dy^+ + \int_{y_c^+}^{y^+} \frac{dy^+}{\alpha_t/\nu}. \quad (7.99)$$

Para tornar possível a integração da parcela correspondente a região turbulenta da equação (7.99), é conveniente explicitar a difusividade térmica turbulenta α_t como função do comprimento adimensional y^+ . Este processo se inicia com a representação de α_t em função do número de Prandtl turbulento Pr_t e da viscosidade turbulenta ν_t , permitindo que o segundo termo do segundo membro da equação (7.99) possa ser representado por

$$\int_{y_c^+}^{y^+} \frac{\text{Pr}_t dy^+}{\nu_t/\nu}. \quad (7.100)$$

A transformação de variáveis proposta por (7.100) permite que a representação de α_t como função de y^+ fique restrita à representação de ν_t/ν como função de y^+ . Para camadas limites de equilíbrio (ver Townsend 1961) a tensão cisalhante total é constante na região interna da camada limite turbulenta, como demonstram os resultados experimentais de Klebanoff (1954) e (1955). Nestas condições é possível obter por integração da equação média de Prandtl, ao longo da direção normal à parede e com a adoção da hipótese de Boussinesq (1872), a seguinte relação entre tensão cisalhante na parede, coeficientes de difusão laminar e turbulenta e

gradiente médio de velocidade na direção normal a parede:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = u_f^2 = (\nu + \nu_t) \frac{d\tilde{u}}{dy}. \quad (7.101)$$

Para a região logarítmica da camada limite, onde a influência da difusão molecular de quantidade de movimento é pequena, esta relação pode ser simplificada,

$$u_f^2 = \nu_t \frac{d\tilde{u}}{dy}. \quad (7.102)$$

A teoria do comprimento de mistura de Prandtl (1925) apresenta sempre bons resultados na região interna da camada limite, sendo por isso adotada para modelar a difusividade turbulenta ν_t nesta região,

$$\nu_t = \ell^2 \left| \frac{d\tilde{u}}{dy} \right| \quad (7.103)$$

com ℓ determinado por (7.78). A razão entre tensão cisalhante e massa específica tem dimensão de velocidade ao quadrado. Na região interna de camadas limites de equilíbrio a tensão cisalhante é constante e seu nível é regulado pelo valor da tensão na parede, calculável pela equação (7.103). Adotando o valor de ν_t modelado pelo comprimento de mistura de Prandtl, equação (7.103), a velocidade de atrito ao quadrado pode ser bem estimada pela relação

$$u_f^2 = K^2 y^2 \left(\frac{d\tilde{u}}{dy} \right)^2. \quad (7.104)$$

A equação (7.104) é adimensionalizada com o emprego das escalas adimensionais de velocidade u^+ e de comprimento y^+ , definidas respectivamente em (7.94) e (7.92), de forma que

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{Ky^+}. \quad (7.105)$$

Reescrevendo o primeiro membro da equação adimensional (7.105) como

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{\nu}{u_f^2} \frac{d\tilde{u}}{dy},$$

e recombinação este resultado com a equação (7.102) obtém-se

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{\nu}{\nu_t},$$

o que permite estabelecer a relação entre a difusividade turbulenta de quantidade de movimento ν_t e o comprimento adimensional y^+ por

$$\frac{\nu_t}{\nu} = Ky^+. \quad (7.106)$$

Após estas considerações a equação integral da temperatura adimensional na camada limite turbulenta, equação (7.99), deduzida para fluidos caracterizados por números de Prandtl com ordem de grandeza próxima da unidade, pode ser formulada como

$$T^+ = \text{Pr} \int_0^{y_c^+} dy^+ + \int_{y_c^+}^{y^+} \frac{\text{Pr}_t dy^+}{Ky^+}. \quad (7.107)$$

Uma forma geral da lei de parede de temperatura é obtida por integração do segundo membro da equação (7.107), de forma que

$$T^+ = \text{Pr} y^+ + \frac{\text{Pr}_t}{K} \ln y^+ + C, \quad (7.108)$$

onde o primeiro termo do segundo membro, $\text{Pr} y^+$, modela a sub-camada laminar, e segundo termo do segundo membro, $(\text{Pr}_t/K) \ln y^+$, descreve a região logarítmica e C é uma constante de integração.

Para gerar uma lei de parede de temperatura para um fluido com características físicas semelhantes ao ar, por exemplo, a integração de (7.107) deve ser feita considerando o comprimento crítico indicado pela tabela 7.1 para o ar, $y_c^+ = 13,2$, o número de Prandtl turbulento com um valor médio igual a $\text{Pr}_t = 0,85$ e o valor da constante de von Kármán $K = 0,41$, resultando na formulação

$$T^+ = 13,2 \text{Pr} + 2,075 \ln y^+ - 5,34 \quad (7.109)$$

que para o ar, com $\text{Pr} = 0,7$, se reduz a

$$T^+ = 2,075 \ln y^+ + 3,9. \quad (7.110)$$

Para líquidos com características físicas próximas a da água, considerando $y_c^+ = 7,55$ e $\text{Pr}_t = 0,85$ a integração da equação (7.107) resulta em

$$T^+ = 7,55 \text{Pr} + 2,075 \ln y^+ - 3,95. \quad (7.111)$$

Esta relação particularizada para a água, com $\text{Pr} = 5,9$, se reduz a

$$T^+ = 2,075 \ln y^+ + 40,6. \quad (7.112)$$

A variedade de leis de parede para temperatura não é grande. Para escoamento de ar em camadas limites de equilíbrio a lei de parede desenvolvida por Cheng e Ng (1982) apresenta bom desempenho. Camadas limites turbulentas, sujeitas a descolamento de camada limite provocada por gradiente adverso de pressão ou por variações bruscas de geometria, são bem modeladas termicamente pela lei de parede de temperatura desenvolvida por Cruz e Silva Freire (1998).

7.5.4 O número de Prandtl turbulento

Na literatura sobre fluxos turbulentos parietais de calor os dados experimentais que caracterizam o número de Prandtl turbulento, são obtidos medidos por medições

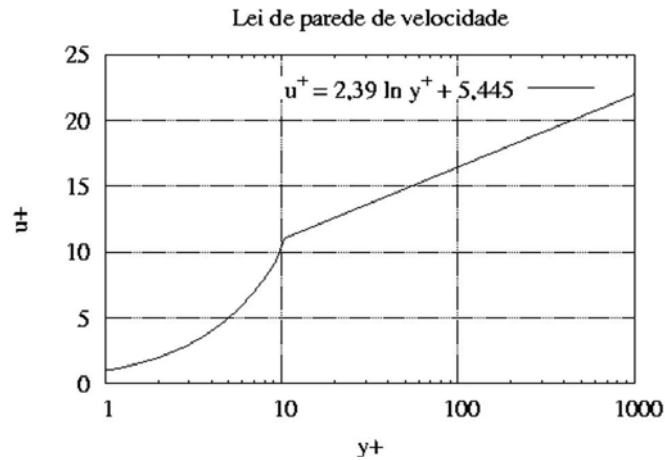


Figura 7.1: Leis de parede para velocidade e temperatura.

feitas das difusividades turbulentas de quantidade de movimento e de calor, uma vez que

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} = \frac{\overline{u'v'} (d\bar{T}/dy)}{\overline{v'T'} (d\bar{u}/dy)}.$$

Embora seja possível a determinação local dos gradientes de temperatura e velocidade médias e dos fluxos turbulentos de quantidade de movimento e calor, a dificuldade de fazer estas medições simultaneamente em um determinado ponto do escoamento, explica a reduzida base de dados experimentais existente sobre este assunto.

Resultados médios dos valores do número de Prandtl turbulento podem ser calculados indiretamente, a partir das leis de parede de velocidade e de temperatura, ilustradas na figura 7.1. A determinação indireta de Pr_t , feita a partir da analogia de Reynolds que supõem $\overline{u'v'} \approx \overline{v'T'}$, considera apenas a relação entre os coeficientes angulares das curvas, $d\bar{T}/dy$ e $d\bar{u}/dy$, tomadas na região logarítmica do gráfico, onde estes valores são constantes.

Na tabela 7.2 são apresentados valores do número de Prandtl turbulento calculados por esta técnica por diversos pesquisadores, para escoamento de ar e a água sobre placa plana horizontal. Os valores Re_δ e Re_Δ representam números de Reynolds calculados com os comprimentos de espessura de quantidade de movimento da camada limite de velocidade δ ,

$$\delta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u\rho}{u_\infty\rho_\infty} \right) dy,$$

Tabela 7.2: Número de Prandtl turbulento para escoamento sobre placa plana.

Dados experimentais	Re_δ	Re_Δ	Pr_t
fluido : ar com $Pr = 0,7$			
Reynolds (1958)	6400		0,73
Moffat (1967)	4419	4756	0,85
Thielbahr (1969)	1572	1684	0,85
Blackwell (1972)	2481	2648	0,85
	2609	3008	0,78
	2971	3180	0,79
Gibson (1984)	2750	3129	0,92
Simon (1980)	4445	1756	0,77
	6365	3746	0,78
	4957	4261	0,82
Pimenta (1975)	15142	15412	0,84
fluido : água com $Pr = 5,9$			
Hollingsworth (1989)	1552	287	0,85

e de espessura entálpica da camada limite de temperatura Δ ,

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty} \left(\frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \right) dy.$$

Os sub-índices p e ∞ indicam, respectivamente, valores sobre a parede e tomados fora da camada limite, sejam de velocidade ou temperatura.

Os valores apresentados na tabela 7.2 mostram para o ar e para a água que, embora a analogia de Reynolds ($Pr_t = 1$) não se confirme rigorosamente, os valores obtidos com base nas leis de parede se aproximam da unidade, oscilando entre os limites de 0,73 e 0,92, sendo $Pr_t \cong 0,85$ o valor experimental mais freqüente.

Os resultados experimentais de Zukauskas e Slanciauskas (1987) para escoamento sobre placa plana com números de Prandtl entre 0,1 e 65, são muito semelhantes aos apresentados na tabela 7.2.

Fora da região logarítmica das camadas limites de velocidade e temperatura o número de Prandtl turbulento passa a variar de forma sensível. A metodologia adotada na construção da tabela 7.2 mostra que para $y^+ < 10$ o número de Prandtl turbulento pode chegar até 2, no início da sub camada laminar.

Os dados experimentais de Roganov *et al.* (1984) para ar sobre placa plana, indicam que na região externa da camada limite o número de Prandtl turbulento tende a diminuir, chegando até 0,5 próximo a fronteira entre a região de esteira e o escoamento não perturbado. Para números de Prandtl muito baixos os valores do número de Prandtl turbulento também afastam-se da unidade.

Nos escoamentos de metais líquidos em dutos, com número de Prandtl entre 0,001 e 0,02, as evidências experimentais referenciadas por Kays and Crawford

(1993) indicam números de Prandtl turbulento consideravelmente maiores do que 1,0.

7.5.5 Determinação analógica dos fluxos turbulentos parietais de calor

O fluxo turbulento de calor em camadas limites de equilíbrio sobre placa plana, pode ser bem modelado por analogia entre os mecanismos de difusão da quantidade de movimento e de calor, permitindo o cálculo das taxas de transferência de calor em função das principais características locais do escoamento e de propriedades termodinâmicas do fluido.

Os parâmetros adimensionais adotados para a quantificação do fluxo de calor e das tensões cisalhantes são o número local de Stanton S_{tx} , definido como

$$S_{tx} = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty} = \frac{q_x}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} \quad (7.113)$$

e o coeficiente de atrito local C_{f_x} ,

$$C_{f_x} = \frac{(\tau_p)_x}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = \frac{2(u_f)_x^2}{u_\infty^2}, \quad (7.114)$$

onde h_x é o coeficiente local de transferência de calor, q_x é o fluxo local de calor na parede e o sub-índice x indica sempre valor local.

O levantamento experimental feito por Reynolds, Kays e Kline (1958), dedicado a determinação dos fluxos de calor que se estabelecem em escoamentos turbulentos de ar sobre placa plana, mostra boa concordância entre os valores medidos e os calculados pela analogia de von Kármán (1939),

$$S_{tx} = \frac{\frac{1}{2} C_{f_x}}{1 + \left(\sqrt{\frac{1}{2} C_{f_x}} \right) [5 \text{Pr} + 5 \ln(5 \text{Pr} + 1) - 14]}, \quad (7.115)$$

que, para número de Prandtl unitário, se reduz a analogia de Osborne Reynolds (1874),

$$S_{tx} = \frac{C_{f_x}}{2}. \quad (7.116)$$

A analogia de Reynolds (1874), equação (7.116), foi estendida por Colburn (1933) para fluidos com número de Prandtl maiores do que 0,5, pela correlação empírica

$$S_{tx} = \frac{C_{f_x}}{2 \text{Pr}^{\frac{2}{3}}}. \quad (7.117)$$

Para o cálculo do número de Stanton local em camadas limite turbulentas, Kays e Crawford (1993) propõem um ajuste da equação (7.117), capaz de torná-la dependente das espessuras das camadas limites de velocidade, δ , e de temperatura, δ_T ,

$$S_{tx} = \frac{C_{f_x}}{2 \text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{\delta}{\delta_T} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (7.118)$$

Em camadas limites térmicas não similares, nas quais o início da camada limite de velocidade é separada do início da camada limite de temperatura por um comprimento ξ , o número de Stanton local pode ser determinado analiticamente, sempre que as propriedades termodinâmicas do escoamento puderem ser consideradas constantes, pela relação

$$S_{tx} = \frac{C_{f_x}}{2 \text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{\frac{9}{10}} \right]^{-\frac{1}{9}}. \quad (7.119)$$

A determinação do coeficiente de atrito, condição necessária para o emprego das analogias entre fluxo de calor e de quantidade de movimento, pode se feita por métodos integrais, por soluções empíricas ou por combinações destas duas metodologias. Um exemplo de associação de diferentes técnicas, na determinação do coeficiente de atrito local, foi obtida por análise integral complementada pela adoção do perfil turbulento empírico de velocidade, por Blasius, considerando dados experimentais para escoamentos em tubos, pela relação

$$C_{f_x} = 0,0456 \text{Re}_\delta^{-\frac{1}{4}}, \quad (7.120)$$

onde Re_δ é o número de Reynolds calculado tomando a espessura da camada limite turbulenta de velocidade δ como comprimento característico.

Para escoamentos de gás, com números de Prandtl no intervalo $0,5 < \text{Pr} < 1$, e números de Reynolds locais entre $5 \times 10^5 < \text{Re}_x < 5 \times 10^6$, o coeficiente de atrito é bem modelado, conforme Reynolds, Kays e Kline (1958), por

$$C_{f_x} = 0,0574 \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}}, \quad (7.121)$$

com Re_x calculado com o comprimento característico dado pela distância x , entre o ponto inicial da camada limite de velocidade e o ponto considerado.

Uma relação mais elaborada, proposta por Schultz-Grunow (1941) para placa plana, baseada em análise integral complementada por dados experimentais para escoamentos turbulentos com número de Reynolds local até 10^9 , é dada por

$$C_{f_x} = 3,2 (\ln \text{Re}_x)^{-2,58}. \quad (7.122)$$

Combinando a analogia de von Kármán (1939), equação (7.115), com a analogia de Schultz-Grunow (1941), equação (7.122), obtém-se uma relação para o número de Stanton local como função do número de Reynolds local,

$$S_{tx} = \frac{1,6 (\ln \text{Re}_x)^{-2,58}}{1 + 1,26 (\ln \text{Re}_x)^{-1,29} [5 \text{Pr} + 5 \ln (5 \text{Pr} + 1) - 14]}. \quad (7.123)$$

Para escoamentos gasosos, considerando a faixa de escoamentos compreendida entre $10^5 < \text{Re}_x < 10^7$, a equação (7.123) pode ser representada de forma aproximada por

$$S_{tx} = 0,0296 \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}} \text{Pr}^{-\frac{2}{5}}. \quad (7.124)$$

Os dados experimentais obtidos por Reynolds, Kays e Kline (1958) mostram para escoamentos de ar entre $10^5 < Re_x < 10^7$, que os resultados dos fluxos de calor obtidos com a equação (7.124) são mais precisos que os resultantes da analogia de Colburn, equação (7.117), que tende a superdimensionar os valores calculados em relação aos experimentais.

Quando a temperatura da parede é muito diferente da temperatura do escoamento não perturbado, o valor das propriedades termodinâmicas do fluido adotadas para o cálculo de Re_x e St_x deve ser feito de forma criteriosa. O trabalho de Kays (1954) propõem que todas as propriedades termodinâmicas sejam avaliadas pela temperatura do escoamento não perturbado e que se adote um fator de correção, baseado da relação

$$\left(\frac{T_p}{T_\infty}\right)^m,$$

onde o expoente m é função apenas da geometria do escoamento.

Os resultados obtidos por Deissler e Loeffler (1955) para placa plana, indicam para a camada limite turbulenta com diferenças significativas entre o T_p e T_∞ , que o número de Stanton deve ser corrigido pelo fator

$$\left(\frac{T_p}{T_\infty}\right)^{-\frac{2}{5}}.$$

Com base nestas considerações, Reynolds, Kays e Kline (1958) propõem uma alteração na equação (7.124) com o objetivo de incluir a influência das temperaturas, T_p e T_∞ , no cálculo do número de Stanton local, dada por

$$St_x = 0,0296 Re_x^{-\frac{1}{5}} Pr^{-\frac{2}{5}} \left(\frac{T_p}{T_\infty}\right)^{-\frac{2}{5}}. \quad (7.125)$$

7.6 Resultados

7.6.1 Introdução

Casos teste

A funcionalidade da metodologia apresentada neste trabalho para a simulação numérica da transferência de calor em escoamentos turbulentos parietais de calor, pode ser avaliada por sua aplicação em três diferentes situações físicas:

caso teste 1 - convecção forçada turbulenta sobre parede plana horizontal com desacoplamento entre os campos de temperatura e de velocidade;

caso teste 2 - convecção forçada turbulenta sobre parede plana horizontal com acoplamento entre os campos de velocidade e de temperatura;

caso teste 3 - convecção natural turbulenta sobre parede plana vertical.

Em cada uma das três situações físicas simuladas numericamente, os resultados numéricos são comparados a dados de natureza experimental. Para a convecção forçada sobre parede plana horizontal com desacoplamento entre os campos de temperatura e de velocidade foi considerado o trabalho de Reynolds, Kays e Kline (1958), complementado por Taylor *et al.* (1990). Para a simulação numérica da convecção forçada sobre parede plana horizontal, com acoplamento entre os campos de velocidade e de temperatura, foi selecionado o trabalho de Ng (1981). Para a simulação da convecção natural sobre parede plana vertical o trabalho experimental adotado foi o de Tsuji e Nagano (1988).

Quando um escoamento turbulento se estabelece sobre uma superfície, originando simultaneamente camadas limites de velocidade e de temperatura, a extensão e a complexidade do acoplamento existente entre os campos de quantidade de movimento e de energia térmica variam com a intensidade dos gradientes de velocidade, pressão e temperatura existentes, com a geometria da parede e também com o comportamento termodinâmico dos fluidos envolvidos no processo. O grau de dificuldade e o custo computacional da modelagem numérica do problema, acompanham a extensão e a complexidade do acoplamento existente entre os campos turbulentos de quantidade de movimento e de energia.

No caso teste de Reynolds, Kays e Kline (1958), complementado por Taylor *et al.* (1990), o escoamento turbulento de ar sobre placa plana horizontal pode ser considerado como incompressível, pois acontece com números de mach inferiores a 0,2. A diferença máxima de temperatura entre a parede e o escoamento não perturbado é de 18 K. Nestas condições os gradientes de temperatura e de velocidade que se estabelecem são de baixa intensidade, incapazes de alterar de forma significativa as propriedades termodinâmicas do fluido em escoamento. A não variação das propriedades termodinâmicas do ar provoca o desacoplamento das equações de conservação de quantidade de movimento e de energia e torna linear o comportamento desta última equação.

No caso teste de Ng (1981), a temperatura do fluxo turbulento de ar é de 293K e a parede plana é mantida a 1250K. O gradiente de temperatura imposto pelas condições de contorno provoca variações importantes das propriedades termodinâmicas do ar no interior da camada limite térmica, estabelecendo o acoplamento entre as equações de conservação de quantidade de movimento e de energia, e também o comportamento não-linear desta última equação.

No caso teste de Tsuji e Nagano (1988), uma parede vertical isotérmica cria um escoamento convectivo natural de ar que, na seção de teste, é totalmente turbulento com numero de Grashof variando no intervalo $1,5 \times 10^{10} < Gr < 1,8 \times 10^{11}$.

O algoritmo numérico

O algoritmo numérico adotado nas simulações é um código de pesquisa que tem origem em trabalhos feitos durante a década de 80, pela equipe de simulação numérica de escoamentos turbulentos do Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Escola Central de Lyon. A versão atual do algoritmo, denominado Turbo2D, é re-

sultado do trabalho de desenvolvimento iniciado em 1990 por membros do Vortex, Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

Entre as principais características do Turbo2D destacam-se a técnica de discretização espacial proposta por Brison, Buffat, Jeandel e Serres (1985) para elementos finitos triangulares, com malha tipo P1 dedicada exclusivamente para a determinação do campo de pressão, associada a uma malha com elementos P1-isoP2 para as demais variáveis. A malha P1-isoP2 é obtida a partir da malha de pressão por divisão equitativa das arestas de cada elemento P1.

Para minimizar as incertezas normalmente existentes sobre as condições iniciais do escoamento a ser modelado, o sistema de equações médias é integrado no tempo entre o instante inicial, definido por condições arbitrárias desde que o campo de velocidade seja solenoidal, e um instante final definido pelo completo desenvolvimento do escoamento, que se caracteriza pelo fim das variações temporais nos valores dos campos de pressão, velocidade e demais variáveis turbulentas. O algoritmo de integração temporal, implementado por Brun (1988), adota diferenças finitas em um arranjo semi-implícito seqüencial, com erro de truncamento de ordem $O(\Delta t)$ e permite a linearização do sistema de equações a cada passo de tempo.

O acoplamento pressão-velocidade é tratado por uma variante do algoritmo de Uzawa implementado por Buffat (1983). A formulação estatística necessária para a obtenção do sistema de equações médias adota as decomposições de Reynolds e de Favre definidas por (7.26). O tensor de Reynolds é modelado via modelo $\kappa - \varepsilon$ de Jones e Launder (1972) com as modificações propostas por Lanuder e Spalding (1974). O fluxo turbulento de calor é modelado algebricamente e o valor do número de Prandtl turbulento é considerado constante e igual a 0,9. São empregadas nas simulações dos casos teste a lei de parede de velocidade logarítmica clássica e leis de parede de temperatura de Cheng e Ng (1982), e Cruz e Silva Freire (1998), implementadas respectivamente por Brun (1988) e por Soares e Fontoura Rodrigues (2004).

O cálculo das condições de contorno de velocidade nas fronteiras sólidas do domínio, feito com o emprego de lei de parede, é um processo numérico explícito, no qual as condições de contorno de velocidade da etapa $(n+1)\Delta t$ são determinadas com base no campo de velocidade calculado na etapa $n\Delta t$ do processo de integração temporal. Este tipo de procedimento é numericamente instável e seu controle, no Turbo2D, é feito por um algoritmo de minimização de erro implementado por Fontoura Rodrigues (1990).

O método de discretização centrada de Galerkin que integra a formulação por elementos finitos, quando aplicada a problemas parabólicos como os escoamentos a serem modelados, origina oscilações numéricas sem significado físico, que se acentuam com o aumento de intensidade dos gradientes. Dois tipos de solução podem ser adotados. A forma mais simples é o refinamento da malha de cálculo nas regiões críticas. Esta solução, além do custo computacional, exige conhecimento antecipado das regiões onde serão necessários refinamentos da malha de cálculo. A segunda opção é o controle numérico das oscilações. No Turbo2D as flutuações

de campo sem significado físico são atenuadas por um algoritmo de dissipação balanceada, baseado nos trabalhos de Huges e Brooks (1979) e de Kelly *et al.* (1980), adaptado para o algoritmo de elementos finitos usado no Turbo2D por Brison, Buffat, Jeandel e Serres (1985) e por Jeandel, Buffat e Carriere (1986).

As leis de parede de temperatura empregada nas três simulações são a de Cheng and Ng (1982) e a de Cruz e Silva Freire (1998). Para a lei de Cheng and Ng (1982) a região interna da camada limite é modelada considerando duas regiões, uma laminar e outra turbulenta com ponto de interseção em $y_c^+ = 15,96$, sendo $y_c^+ = u_f \delta / \nu$ e a velocidade de atrito u_f é calculada pela relação

$$u_f = \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \right]_\delta. \quad (7.126)$$

O número de Reynolds turbulento Re_t é definido de acordo com o proposto no modelo $\kappa - \varepsilon$,

$$\frac{1}{\text{Re}_t} = C_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\varepsilon}. \quad (7.127)$$

As relações da lei de parede de temperatura de Cheng and Ng (1982) para as regiões laminar e turbulenta valem, respectivamente,

$$\frac{(T_\infty - T)_y}{T_f} = y^+ \text{Pr} \quad \text{e} \quad \frac{(T_\infty - T)_y}{T_f} = \frac{1}{K_{Ng}} \ln y^+ + C_{Ng}, \quad (7.128)$$

onde T_f é uma temperatura de atrito definida como

$$T_f u_f = \left[\left(\frac{1}{\text{Re Pr}} + \frac{1}{\text{Re}_t \text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right]_\delta. \quad (7.129)$$

Na equação (7.128) as constantes K_{Ng} e C_{Ng} valem, respectivamente, 0,8 e 12,5. O número de Prandtl turbulento Pr_t é igual a 0,9.

A lei de parede de temperatura de Cruz and Silva Freire (1998), sensível a gradientes adversos de pressão, é formulada em função dos valores parietais do fluxo de calor q_p e da tensão cisalhante τ_p . O valor E é uma constante igual a 9,8. Sua formulação é dada por

$$\begin{aligned} \frac{T_p - T}{q_p} &= \frac{\text{Pr}_t}{K \rho C_p u_f} \ln \frac{\sqrt{(\tau_p/\rho) + (1/\rho)(dp_p/dx)y} - \sqrt{\tau_p/\rho}}{\sqrt{(\tau_p/\rho) + (1/\rho)(dp_p/dx)y} + \sqrt{\tau_p/\rho}} \\ &+ \frac{\text{Pr}_t}{K \rho C_p u_R} \ln \frac{4E u_R^3}{\nu |dp_p/dx|} + AJ, \end{aligned} \quad (7.130)$$

com os parâmetros AJ and AX e a temperatura de atrito T_f definidas como

$$\begin{aligned} AJ &= 1.11 \text{Pr}_t \sqrt{\frac{AX}{K}} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} - 1 \right) \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)^{0,25}, \\ AX &= 26 \frac{|\tau_p/\rho|^{\frac{1}{2}}}{u_R}, \\ T_f &= \frac{q_p}{\rho C_p u_f}. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Para a energia cinética turbulenta κ e sua taxa de dissipação ε , os valores no contorno da malha são calculados pelas relações

$$\kappa = \left[\frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \right]_\delta \quad \text{e} \quad \varepsilon = \left[\frac{u_f^3}{K\delta} \right]_\delta, \quad (7.132)$$

com $K = 0,419$.

7.6.2 Resultados

Caso teste 1

Os trabalhos de Reynolds, Kays e Kline (1958) complementados por de Taylor *et al.* (1990) reúnem resultados experimentais correspondentes a uma larga faixa de escoamentos turbulentos, todos eles constituídos por escoamentos incompressíveis de ar, sobre parede plana isotérmica, lisa, com início da camada limite de temperatura defasado em relação a origem da camada limite de velocidade. Os resultados selecionados para apresentação integram uma das séries medidas por Taylor *et al.* (1990)

No caso selecionado as condições de contorno de temperatura impostas na placa criam um comprimento inicial ξ adiabático, onde existe igualdade entre as temperaturas da placa e do ar. O comprimento ξ é seguido por um trecho de placa isotérmica com temperatura superior a do escoamento não perturbado. A temperatura da placa ao longo do comprimento ξ é de 299 K. No trecho posterior, onde se estabelece fluxo de calor entre placa e escoamento, a temperatura imposta na parede é de 17 K. A velocidade do escoamento não perturbado pela placa é de 28 m/s. O comprimento total da placa é de 2,4 m. O número de Reynolds local varia no intervalo $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$. São testados três diferentes comprimentos adiabáticos ξ , iguais a 0,36 m, 0,76 m e 1,36. Para efeito de comparação é incluído também o resultado para a placa com ($\xi = 0,0$ m).

O fluxo de calor entre a placa e o escoamento é representado graficamente pela variação do número de Stanton local em função do número de Reynolds local. Os resultados experimentais são comparados a resultados numéricos e a resultados analíticos. Os resultados numéricos apresentados, determinados a partir das relações (7.113) e (7.118), são referenciados na figura 7.2 como resultados “numérico 1” e “numérico 2”, respectivamente. Para a determinação do número de Stanton por meio da equação (7.113) o fluxo local de calor q_x é calculado pela relação

$$q_x = -k \left(\frac{\Delta T}{\Delta y} \right)_{y=0},$$

com os valores de $\Delta T \setminus \Delta y$ determinados numericamente. O valor do coeficiente de atrito C_{f_x} usado nas equações (7.113) e (7.118) é determinado numericamente por (7.114). A solução analítica para o problema é calculada pela relação (7.119), com o valor de C_{f_x} dado por (7.121). A malha de cálculo P1-isoP2 usada para

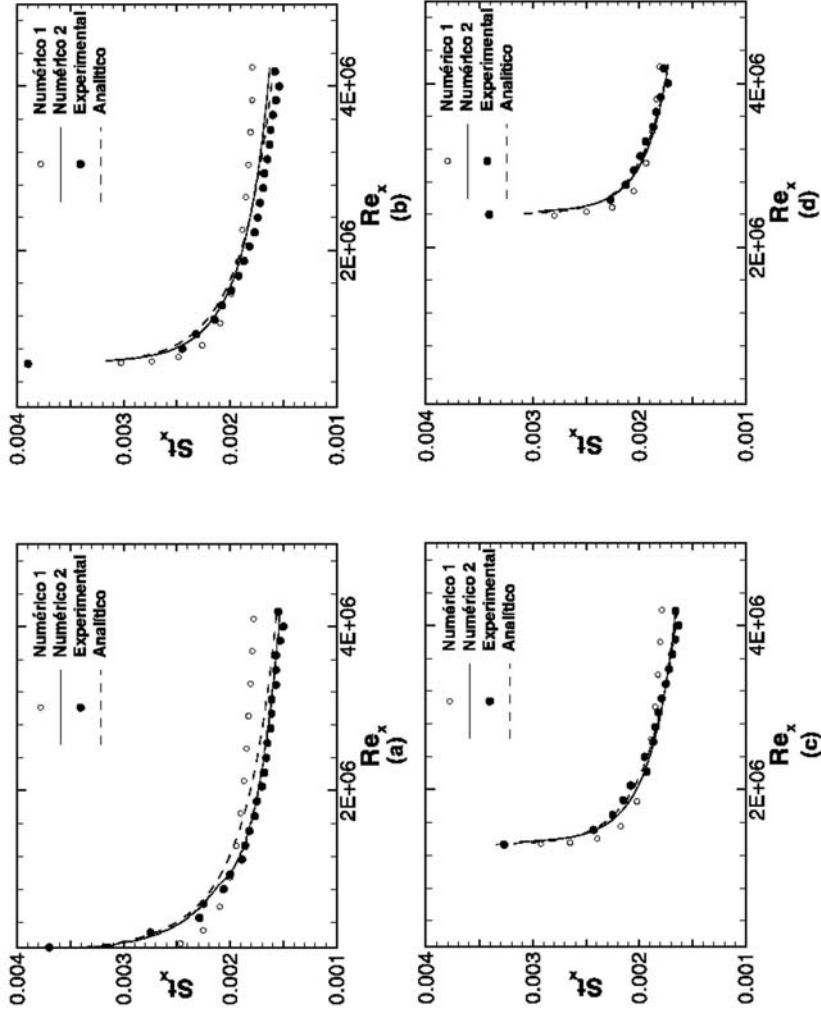


Figura 7.2: Caso teste 1 - Taylor *et al.* (1990): (a) $\xi = 0$ m; (b) $\xi = 0,36$ m; (c) $\xi = 0,76$ m; (d) $\xi = 1,36$ m.

discretização espacial do domínio é constituída por 18447 nós e 35872 elementos finitos.

Os resultados numéricos da Figura 7.2 mostram boa concordância com a base de dados experimental e com a solução analítica. Nas quatro configurações apresentadas na figura 7.2, o resultado “numérico 2” é sensivelmente mais preciso que o resultado “numérico 1” e, para a placa com $\xi = 0$ da figura 7.2(a), o resultado “numérico 2” se aproxima mais dos valores experimentais que a solução analítica.

Caso teste 2

No escoamento de ar sobre placa plana aquecida de Ng (1981), a temperatura do escoamento não perturbado é de 293 K e a temperatura da parede é mantida a 1250 K. A velocidade do escoamento não perturbado é de 10,7 m/s. O comprimento da placa plana é de 250 mm e a variação do número de Reynolds local, ao longo da placa, varia entre $5 \times 10^5 < Re_x < 7,8 \times 10^5$. A malha de cálculo P1-isoP2 usada para discretização espacial do domínio é constituída por 6499 nós e 12672 elementos finitos.

O fluxo de ar que incide sobre a placa aquecida é totalmente desenvolvido em túnel de vento. Como o gradiente de temperatura no interior da camada limite térmica é de 957 K as variações das propriedades termodinâmicas do ar são grandes no interior da camada limite. O acoplamento entre as equações de quantidade de movimento e de energia e o comportamento não linear da equação da energia são as características físicas mais importantes deste caso teste.

Os resultados apresentados neste caso teste 2, comparam valores experimentais de Ng (1981) com os valores numéricos obtidos com o código Turbo2D e com o programa comercial CFX, versão 5.5. Os valores numéricos obtidos com o Turbo2D correspondem às leis de parede de temperatura de Cheng and Ng (1982) e a de Cruz e Silva Freire (1998), representadas nas figuras 7.3 pelas legendas “Turbo2D (cng)” e “Turbo2D (csf)”, respectivamente. Os valores numéricos obtidos com o CFX - 5.5 resultam do emprego dos modelos de turbulência $\kappa - \varepsilon$ de Jones e Launder (1972) e SST de Menter (1993), representados nas figuras 7.3 pelas legendas “CFX ($\kappa - \varepsilon$)” e “CFX (SST)”, respectivamente. Maiores detalhes sobre estes resultados podem ser encontrados em Soares e Fontoura Rodrigues (2004).

A figura 7.3(a) mostra os resultados correspondentes ao perfil de velocidade, a figura 7.3(b) apresenta o perfil de massa específica e a figura 7.3(c) ilustra o desenvolvimento da espessura da camada limite de velocidade.

A figura 7.3(d) mostra a variação do número de Stanton local ao longo do comprimento x da placa isotérmica. Os resultados obtidos com as leis de parede do Turbo2D são muito semelhantes entre si e seguem de muito perto os resultados experimentais de Ng (1981). Neste caso o cálculo do número de Stanton local foi feito com a metodologia usada no caso teste 1 para resultados do tipo “numérico 1”.

Em todos os resultados mostrados nas figuras 7.3 os resultados experimentais de Ng (1981) são bem modelados numericamente. A semelhança entre os perfis obtidos com as leis de parede de temperatura é esperado uma vez que a lei de

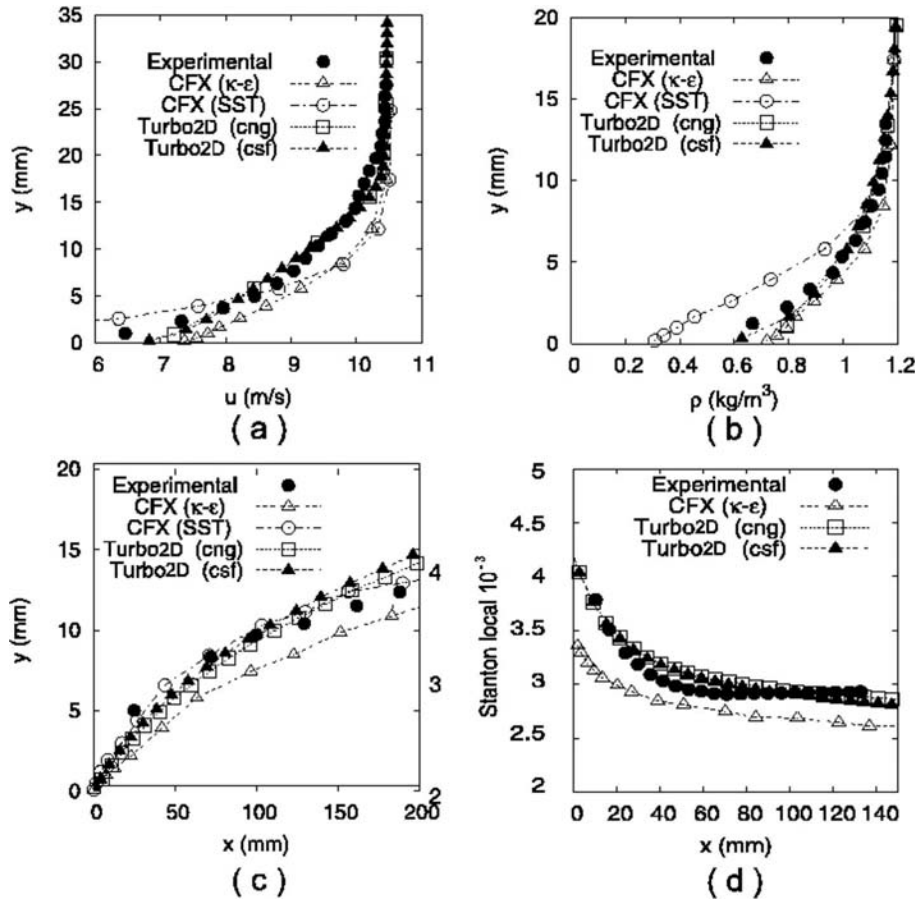


Figura 7.3: Caso teste 2 - Ng (1981): (a) perfil de velocidade; (b) perfil de massa específica; (c) espessura da camada limite de velocidade; (d) Stanton local.

Cruz e Silva Freire (1998) tende à lei de Cheng and Ng (1982) quando os gradientes longitudinais de pressão tendem a zero, como acontece no escoamento sobre placa plana de Ng (1981).

Caso teste 3

Neste caso teste são apresentados os resultados numéricos correspondentes ao escoamento de convecção natural turbulenta de ar sobre placa plana vertical de Tsuji e Nagano (1988), que faz parte da base de dados experimentais de referência do Ercoftac (European Research Community on Flow, Turbulence and combustion), para o estudo numérico de camadas limite turbulentas formadas por convecção natural. (ver Tsuji e Nagano, 1996).

O escoamento em estudo é uma camada limite turbulenta gerada por convecção natural, sobre placa plana e isotérmica de cobre mantida na posição vertical. Na seção média longitudinal da placa o escoamento de ar pode ser tratado como bidimensional e incompressível, sendo a massa específica a única propriedade termodinâmica do fluido que varia significativamente com a temperatura.

O comprimento total da parede plana é de 4 m, sua largura é de 1 m, o sistema de referências é posicionado no bordo de ataque da placa e o comprimento na direção vertical é representado por x . A seção de teste do escoamento foi monitorada em 4 quatro estações de medida, localizadas nos pontos $x = 1,44$ m, $x = 1,92$ m, $x = 2,54$ m e $x = 3,24$ m. Foram estudados experimentalmente por Tsuji e Nagano (1988) os processos convectivos naturais provocados pela placa isotérmica mantida a 333 K e a 373 K. O caso teste 3 só apresenta o escoamento correspondente a parede mantida a 333 K. Na convecção natural que se estabelece na placa de Tsuji e Nagano (1988), a parte terminal da região de transição entre escoamento laminar e turbulento, está localizada em $x \cong 0,8$ m.

Para realização do ensaio de Tsuji e Nagano (1988), a temperatura do ar ambiente não perturbado foi mantida em 288 K, a pressão atmosférica local em 101,7 kPa, a viscosidade cinemática do ar nestas condições vale 1.67×10^{-5} m²/s e seu número de Prandtl é igual a 0,71.

Dentre a massa de dados existentes foi selecionado, para ser apresentada como exemplo, o levantamento experimental correspondente a parede isotérmica mantida a 333 K, na seção de medida $x = 2,54$ m. Neste ponto do escoamento o número de Grashof local, Gr_x , oscila entorno de 9×10^{10} , com

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)x^3}{\nu^2} = \frac{g(T_p - T_\infty)x^3}{T_\infty\nu^2}, \quad (7.133)$$

onde g é a aceleração gravitacional e $\beta T_\infty = 1$.

O domínio de cálculo computacional tem início em $x = 1,44$ m, sua largura é de 0,5 m e sua seção de saída é fixada em $x = 3,92$ m. Entre as seções de entrada e saída o número de Grashof local, definido por (7.133), varia no intervalo $1,5 \times 10^{10} < Gr_x < 1,8 \times 10^{11}$, o número de Reynolds local, na mesma região, oscila entre $2778 < Re_x < 7564$.

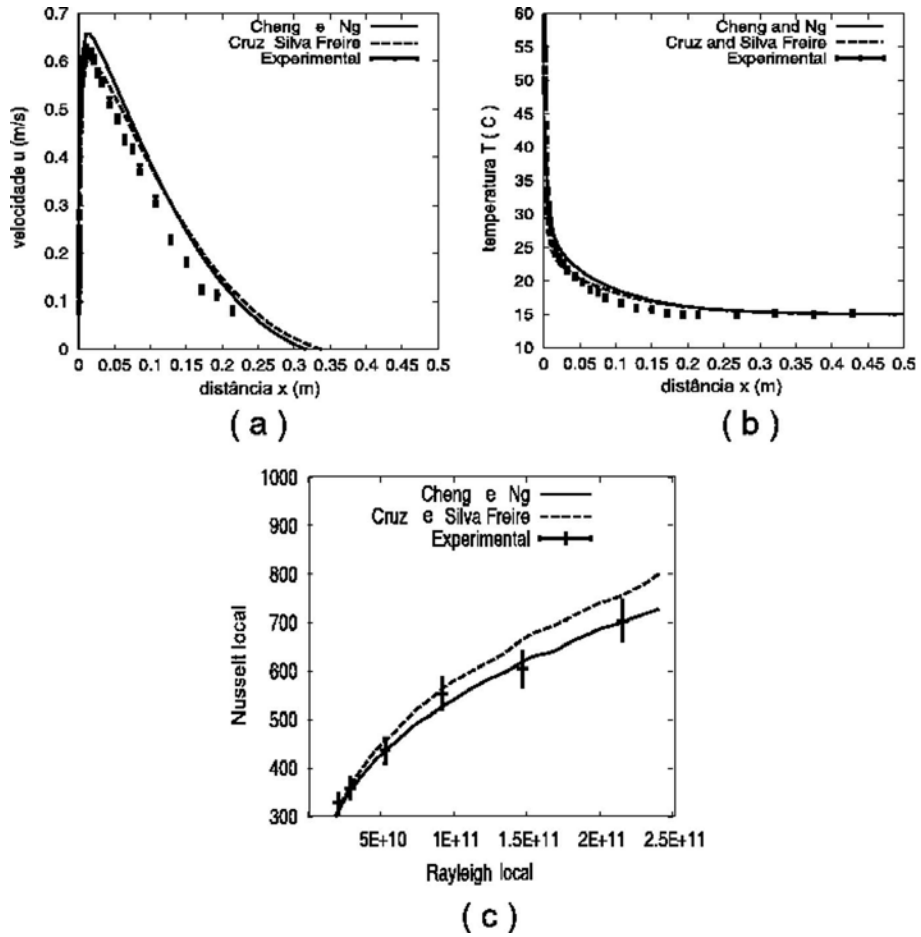


Figura 7.4: Caso teste 3 - Tsuji e Nagano (1988): (a) velocidade; (b) temperatura (c) Nusselt versus Rayleigh

As condições de contorno nas seções de entrada e saída da malha são baseadas em dados experimentais. A malha de cálculo P1-isoP2 usada para discretização espacial do domínio é constituída por 2639 nós e 5040 elementos finitos.

As figuras 7.4(a) e 7.4(b) mostram os perfis de velocidade e temperatura na direção normal a parede, em $x = 2,54$ m, medidos por Tsuji e Nagano - (1996) e modelados numericamente com o algoritmo Turbo2D com o emprego das leis de parede de Cheng and Ng (1982) e a de Cruz e Silva Freire (1998). Os resultados numéricos obtidos são muito semelhantes aos dados experimentais de Tsuji e Nagano (1996), tanto para a velocidade como para a temperatura.

O resultado da figura 7.4(c) mostra, por meio dos números adimensionais locais de Nusselt e de Rayleigh, o fluxo de calor ao longo de toda a parede do domínio de cálculo. O número de Nusselt local, Nu_x , é definido como

$$Nu_x = \frac{q_p x}{(T_p - T_\infty) k}, \quad (7.134)$$

sendo q_p o fluxo de calor na parede. O número de Rayleigh local, Ra_x , é definido como

$$Ra_x = Pr Gr_x.$$

Os resultados numéricos obtidos com as duas leis de parede implementadas no Turbo2D e apresentados na figura 7.4(c) são bons. Seus valores estão praticamente dentro da faixa de incerteza experimental, ao longo de toda a extensão da placa.

7.6.3 Conclusão

Os problemas físicos ensaiados foram selecionados com o objetivo de mostrar a capacidade da metodologia apresentada neste capítulo para o modelamento numérico de fluxos de calor em escoamentos turbulentos parietais de ar, ou de fluidos similares. Para tanto as situações físicas abordadas consideram inicialmente a não variação das propriedades físicas do fluido com a temperatura do escoamento, caso teste 1. Na seqüência é modelado o escoamento onde a variação das propriedades físicas do escoamento varia muito com a temperatura, caso teste 2. Finalmente é analisado um escoamento onde apenas a massa específica do fluido varia significativamente com a temperatura, caso teste 3.

Nas três situações os resultados numéricos obtidos pela metodologia proposta, produzem boas aproximações dos valores experimentais. As diferenças observadas entre resultados numéricos e experimentais, na maior parte dos perfis, são de dimensão igual ou inferior às faixas de incerteza experimental.

7.7 Agradecimentos

Agradeço a FINATEC - Fundação de Empreendimentos Científicos e Tecnológicos pelo apoio técnico e financeiro prestado ao Vortex - Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

Agradeço a imprescindível competência, dedicação e entusiasmo dos alunos que participaram das atividades que fundamentaram este trabalho, em especial a Daniel Vieira Soares, Rafael Gabler Gontijo, Rodrigo Carrijo Lino e Ailson Santiago de Farias.

7.8 Referências

Anderson AA, Tannehill JC e Pletcher RH; “Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer,” Hemisphere Publishing Corporation, New York (1984).

Arpaci VS, Larsen PS; “Convection Heat Transfer,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1984).

Buffat M; “Méthode de gradients conjugués pour la prediction des écoulements à grand nombre de Reynolds,” *6^{ième} Congrès Français de Mécanique*. Lyon (1983).

Boussinesq J; “Essai sur la théorie des eaux courantes,” *Memorial da Academia de Ciências da França* **23**, no. 1, pp.1-680 (1872).

Brison JF, Buffat M, Jeandel D, Serres E; “Finite element simulation of turbulent flows, using a two-equation model,” in *Numerical Methods in Laminar and turbulent Flows*, Pineridge Press, Swansea (1985).

Brun G; “Developpement et application d’une methode d’elements finis pour le calcul des ecoulements turbulents fortement chauffes,” Tese de Doutorado, Escola Central de Lyon (1988).

Cebeci T, Smith AMO; “Analysis of Turbulent Boundary Layers,” Academic Press, Londres (1987).

Chassaing P, Antonia RA, Anselmet F, Joly L, Sarkar S; “Variable Density Fluid Turbulence,” Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).

Chen CJ, Jaw SY; “Fundamentals of Turbulence Modeling,” Taylor & Francis, New York (1998).

Cheng RK, Ng TT; “Some aspects of strongly heated turbulent boundary layer flow,” *Phys. Fluids* **25**, 8, pp.1333-1341 (1982).

Colburn AP; “A method for correlating forced convection heat transfer data and a comparison with fluid friction,” *Transactions of American Institute of Chemical Engineering* **29**, pp. 174-210 (1933). Reimpresso em 1964 no *International Journal of Heat and Mass transfer* **7**, pp.1359-1384.

Cruz DOA, Silva Freire AP; "On single limits and the asymptotic behavior of separating turbulent boundary layers," *International Journal of Heat and Mass Transfer* **41**, n^o 14, pp.2097-2111 (1998).

Deissler RG, Loeffler AL; "Turbulent Flow and Heat Transfer on a Flat Plate at High Mach Number with Variable Fluid Properties," *ASME* n^o 55-A-133 (1955).

Favre A; "Equations de gaz turbulents compressibles I – Formes générales," *Journal de Mécanique* **4**, 3, pp.361-390 (1965).

Fontoura Rodrigues JLA; "Méthode de minimisation adaptée à la technique des éléments finis pour la simulation des écoulements turbulents avec conditions aux limites non lenéaires de proche paroi," Tese de Doutorado, Escola Central de Lyon. Lyon (1990).

Foulachier L; "Contribution à l'étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulente. Effet de l'aspiration," Tese de Doutorado de Estado. Universidade de Provence (1972).

Hanjalić K, Launder BE; "A Reynolds-stress model of turbulence and its applications to thin shear flows," *J. Fluid Mech.* **52**, 4, pp.609-638 (1972).

Hanjalić K, Launder BE; "Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence," *J. Fluid Mech.* **74**, 4, pp.539-610 (1976).

Huges TJR, Brooks A; "A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion," in *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ASME - AMD, **34**. New York (1979).

Jeandel D, Buffat M, Carriere P; "Numerical Methods for 2D and 3D Heat Transfer Calculations," in *Introduction to Numerical Solution of industrial Flows*. Von Kármán Institute Lectures Series 86-07 (1986).

Jones WP; "Models for Turbulent Flows with variable density and Combustion," VKI Lecture Series (1979).

Jones WP, Launder BE; "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence," *Int. J. Heat and Mass Transfer* **15**, pp.301-314 (1972).

Jones WP, Mc Guirk JJ; "Mathematical Modelling of Gas-turbine Combustion Chambers," 'AGARD CP275 (1979).

Kays WM; "A Summary of Experiments and Analysis for Gas Flow, Heat Transfer and Friction in Circular Tubes," TR - 22, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford (1954).

Kays WM, Crawford ME; “Convective Heat and Mass Transfer,” Terceira Edição, McGraw-Hill, Inc., New York (1993).

Kelly DW, Nakazawa S, Zienkiewicz OC, Heinrich JC; “A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **15**, 11, pp.1705-1711 (1980).

Klebanoff PS; “Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient,” *National Bureau of Standards, NACA TN n° 3178* (1954).

Klebanoff PS; “Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient,” *National Bureau of Standards, NACA TN n° 1247* (1955).

Kline SJ, Reynolds WC, Schraub FA, Runstadler PW; “The structure of turbulent boundary layers,” *J. Fluid Mech.* **30** pp.741-773 ((1967)).

Kollmann W; “Berechnung von turbulenten verbrennungsvorgängen in Flammen und Brennkammern,” Hab. Thesis RWTH, Aachen (1979).

Laufer J, Ludloff KG; “Conservation equations in a compressible turbulent fluid and a numerical scheme for their solution,” *McDonnell Douglas Paper*, WD 1355 (1970).

Lauder BE, Spalding DB; “The numerical computation of turbulent flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **3**, pp.269-289 (1974).

Laurence D; “Large Eddy Simulation of Industrial Flows ?” in *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*, pp.392-406. Cambridge University Press, Cambridge (2002).

Martinelli RC; “Heat transfer to molten metals,” *Transactions of ASME* **69**, pp.947-959 (1947)

Menter FR; “Zonal two equation $\kappa - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows,” *AIAA Journal*, paper 93 - 2906 (1993).

Nagano Y; “Modelling Heat Transfer in Near-Wall Flows,” in *Closures Strategies for Turbulent and Transitional Flows*, pp.188-247. Cambridge University Press (2002).

Nallasamy M; “Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: A Review,” *Computer & Fluids* **15**, (1987).

Ng TT; "Experimental study of a chemical reacting turbulent boundary layer," Ph. D. Thesis, Lawrence Berkley Laboratory, University of California, Berkeley (1981).

Prandtl L; "Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung," *Verhandlg, Third International Congress of Mathematics. Heidelberg*, pp.484-491 (1904). (Versão deste trabalho em inglês denominado "Motion of fluid with very little viscosity," foi publicado em março de 1928 pela NACA TM 452).

Prandtl L; "Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Shömungswiderstand der Flüssigkeiten," *Z. Physik* **11**, pp.1072-1078 (1910).

Prandtl L; "On the fully developed turbulence," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **5** pp.136-139 (1925).

Reynolds O; "On the extent and action of the heating surfaces for steam boilers," *Procedures of Manchester Literature Philosophical Society* **14**, pp.7-12 (1874).

Reynolds O; "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and Determination of the Criterion," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* **186**, pp.123-161 (1895).

Reynolds WC, Kays WM, Kline SJ; "Heat Transfer in the Turbulent Incompressible Boundary Layer," NASA Memorandum 12-1-58W (1958).

Ristorcelli JR; "A representation for Turbulent Mass Flux Contribution to Reynolds Stress and Two-Equation Closures for Compressible Turbulence," CASE Report No. 93-88, University Space Research Association, Hampton (1993).

Rodi W; "Turbulence models and their applications in hydraulics. A state of the art review," 2ª edição, International Association for Hydraulic Research (1984).

Roganov PS, Zabolotsk VP, Shihov EV, Leontiev AI; *International Journal of Heat and Mass Transfer* **27**, pp.1251-1259 (1984).

Sandham ND; "Introduction to Direct Numerical Simulation," in *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*, pp.248-266. Cambridge University Press, Cambridge (2002).

Sarkar S; "The Pressure-Dilatation Correlation in Compressible Flows," *Phys. Fluids A* **4**, pp.2674-2682 (1992).

Schultz-Grunow F; "New Frictional Resistance Law for Smooth Plates," NACA TM 986 (1941).

Silveira Neto A, Mansur SS; “Turbulência,” in *Coleção Cadernos de Turbulência*, **2**, II Escola de primavera em transição e Turbulência, Universidade Federal de Uberlândia, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas (2003).

Soares DV, Fontoura Rodrigues JLA; “Complex Near-Wall Turbulent Flows: A Performance Analysis of Velocity and temperature laws of the Wall,” *Escola de Primavera de Transição e Turbulência*, 27 de setembro a 27 de outubro, Porto Alegre, Brasil (2004).

Soares DV, Fontoura Rodrigues JLA; “The Performance of Thermal and Velocity Wall Laws,” *Proceedings of the 10th Congress of Thermal Sciences and Engineering* (ENCIT 2004), paper CIT04-0576, Rio de Janeiro.

Taylor RP, Love PH, Coleman HW, Hosni MH; “Heat Transfer Measurements in Incompressible Turbulent Flat Plate Boundary Layers with Step wall Temperature Boundary Conditions,” *J. Heat Transfer* **112**, pp.254-247 (1990).

Tennekes H, Lumley JL; “A first course un turbulence,” MIT Press (1973).

Tsuji T, Nagano Y; “Turbulence Measurements in a Natural Convection Boundary Layer along a Vertical Flat Plate,” *Int. J. Heat and Mass Transfer* **31**, pp.2101-2111 (1988).

Tsuji T, Nagano Y; “Natural convective vertical boundary layer,” Ercoftac Data base, *Turbulence Modelling Test Cases*, 5th workshope at EDF Chatou (1996).

Townsend AA; “Equilibrium layers and wall turbulence,” *J. Fluid Mech.* **11**, pp.97-120 (1961).

Vandrome D; “Modèle de turbulence à deux équations pour écoulement plan cisailé à masse volumique variable,” Thèse Université des Sciences et Techniques de Lille, Lille (1980).

van Driest ER; “Turbulent boundary layer in incompressible fluids,” *J. Aero. Science* **18**, pp.145 (1951).

von Kármán T; “The Analogy Between Fluid Friction and Heat Transfer,” *ASME Transactions* **61**, pp.705-710 (1939).

Wilcox DC; “Turbulence Modeling for CFD,” 2^a edição, DCW Industries, La Cañada, California (1998).

Wilcox DC, Rubesin MW; “Progress in Turbulence Modeling for Complex Flow Fields Including Effects of Compressibility,” NASA TP-1517 (1977).

Zeman O; "A New Model for Super/hypersonic Turbulent Boundary Layers," *AIAA Paper* 93-0897 (1993).

Zukauskas A, Slanciauskas A; "Heat Transfer in Turbulent Fluid Flows," Hemisphere, Washington (1987).